UE Mathématiques 2

TD6 - Applications linéaires 1

1 Application linéaire, noyau, image

Exercice 1. *1. Lequelles parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sont linéaires ?*

1. $p_1(x, y) = x, \quad p_2(x, y) = y,$
2. $f_1(x, y) = xy, \; f_2(x, y) = x + y, \quad f_3(x, y) = x + y + 1, \; f_4(x, y) = x^2 - y^2,$
3. $f_5(x, y) = |x + y|, \; f_6(x, y) = \sin x, \; f_7(x, y) = x - 3y.$

2. Lesquelles parmi les applications suivantes, définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sont linéaires ?

$$g_1(x, y) = (y, x), \quad g_2(x, y) = (x, y^2), \quad g_3(x, y) = (1, x).$$

Exercice 2. *Déterminer le noyau et l'image (base et dimension) de chacune des applications linéaires f suivantes. Sont-elles injectives ? surjectives ?*

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (3x + y, x - y)$, *b)* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (x + y, x)$,

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (x+2y, 2x+4y)$, *d)* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (z, y, 0)$.

e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y) = (x - y, x + y, x + 2y)$.

Exercice 3. *Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, si e_1, e_2, e_3 désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on ait :*

$$f(e_1) = (1, 1), \qquad f(e_2) = (0, 1), \qquad f(e_3) = (-1, 1).$$

Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$. *Quelle est l'image réciproque du vecteur* $(1, 0)$ *? Quelle est l'image réciproque du sous espace vectoriel engendré par* $(1, 0)$ *?*

2 Matrice associée à une application linéaire

Exercice 4. *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x, y) = (2x + y, x + y).$$

1. *Représenter f sous forme matricielle.*
2. *Montrer que la matrice associée est inversible. Que peut-on en déduire sur f ?*
3. *Donner l'expression de l'application réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.*

Exercice 5. *On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x, y, z) = (x, x - y, y + z).$$

1. *Représenter f sous forme matricielle.*
2. *Déterminer le noyau de f (base et dimension). L'application f est-elle injective ?*
3. *Déterminer l'image de f (base et dimension). L'application f est-elle surjective ?*
4. *On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivant*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Déterminer une base de P, puis une base de $f(P)$.

3 Changement de base

Exercice 6. *On considère l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

1. *Ecrire la matrice* A *de l'application linéaire* f *dans la base* $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ *canonique.*

2. (a) *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ *avec* $u_1 = (0, 1)$, $u_2 = (1, 0)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
   (b) *Ecrire la matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{E}$ *à la base* $\mathcal{B}$ *et calculer son inverse* P^{-1}.
   (c) *Ecrire la matrice* A' *de l'application linéaire* f *dans la base* $\mathcal{B}$.
   (d) *Vérifier que* $A' = P^{-1}AP$.

3. *Mêmes questions avec la famille de vecteurs* $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ *avec* $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$

Exercice 7. *On considère l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. *Ecrire la matrice* A *de l'application linéaire* f *dans la base* $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ *canonique.*

2. *Montrer que la famille de vecteurs* $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ *avec* $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, -1)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

3. *Ecrire la matrice* $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ *de l'application identité de* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$ *dans*$(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$.

4. *En déduire la matrice de passage* P *de la base* $\mathcal{E}$ *à la base* $\mathcal{B}$ *et calculer son inverse* P^{-1}.

5. *Ecrire la matrice* A' *de l'application linéaire* f *dans la base* $\mathcal{B}$ *et vérifier que* $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 8. *Dans* $\mathbb{R}^3$, *on considère les vecteurs*

$$u = (1, -1, 0), \qquad v = (1, 1, 1), \qquad w = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que les trois vecteurs (u, v, w) *forment une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Ecrire la matrice de passage* P *de la base canonique* $\mathcal{E}$ *à la* $\mathcal{B}$. *Calculer* P^{-1}.
2. On considère l'application linéaire f *définie sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z).$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. *Quel est sa dimension?*
5. En déduire le rang de f *et donner une base de* $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9. *On considére une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par:*

$$f(e_1) = (1, -1, 1), \quad f(e_2) = (1, 1, -1) \quad et \quad f(e_3) = (1, 0, 0),$$

où $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Ecrire* f *en composantes (c'est à dire* $f(x, y, z) =?$*).*

2. *Ecrire la matrice* A *de l'application linéaire* f *en base canonique.*

3. *Déterminer le noyau et l'image de* f. *Donner une base du noyau et de l'image et en déduire leur dimensions respectives.*

4. *L'application* f *est-elle bijective?*

5. *On considère maintenant les trois vecteurs suivants:*

$$u_1 = (1, -1, 1), \qquad u_2 = (1, 1, -1), \qquad u_3 = (-1, 1, 1).$$

   (a) *Montrer que* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *estune base de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Ecrire la matrice de passage* P *de la base canonique* $\mathcal{E}$ *à la base* $\mathcal{B}$.
   (c) *Calculer* P^{-1}.
   (d) *En déduire la matrice* A' *qui représente l'application linéaire* f *dans cette nouvelle base.*