Examen Partiel n° 2 – 26 avril 2016 – **Durée : 1H30**.

Ni document, ni calculatrice, ni téléphone portable.

Gardez votre calme, lisez soigneusement chaque énoncé, et concentrez-vous. Écrivez lisiblement, l'appréciation de votre copie (autrement dit, la note) tiendra compte du soin apporté à la rédaction : présentation, expression écrite et clarté de raisonnement. Relisez-vous. Bonne chance !

Exercice 1 - Espaces vectoriels. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs

$$a_1 = (1,1,1,1), \qquad a_2 = (0,1,1,1), \qquad a_3 = (0,0,1,1), \qquad a_4 = (1,-1,1,1).$$

Soit $H = \text{vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille (a_1, a_2, a_3, a_4).

1. Déterminer si la famille (a_1, a_2, a_3, a_4) est libre ou liée.
2. Déterminer le rang de cette famille et en déduire la dimension de H.
3. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire euclidien. Déterminer le sous-espace vectoriel
$$H^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, v \cdot u = 0, \forall\, u \in H\}$$
nommé supplémentaire orthogonal de H. En spécifier une base.

Exercice 2 - Système linéaire. On se propose de déterminer suivant les valeurs du réel α l'ensemble des solutions du système linéaire $A_\alpha X = 0$, où

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système pour $\alpha = 1$.
2. Calculer $\det A_\alpha$ et déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\det A_\alpha = 0$.
3. Si f_α est l'application linéaire ayant pour matrice A_α dans la base canonique. On suppose que $\det A_\alpha \neq 0$. Que peut on dire de $\text{Ker}\, f_\alpha$? Qu'en conclure sur f_α ?
4. Résoudre le système lorsque $\det A_\alpha = 0$.
5. En déduire la dimension de $\text{Im}\, f_\alpha$ lorsque $\det A_\alpha = 0$.
6. *Question BONUS* : pour $\det A_\alpha \neq 0$, calculer la matrice inverse.

Exercice 3 - Courbe paramétrée. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté au repère canonique $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$x(t) = 3t + t^3, \qquad y(t) = t^3 - \frac{1}{t}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition du paramétrage $t \mapsto (x(t), y(t))$.
2. Étudier les symétries usuelles de Γ sous $t \to -t$ et en déduire que l'intervalle d'étude se réduit à $]0, +\infty[$.
3. Donner une étude des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Étudier les branches infinies sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
5. Tracer la courbe Γ (esquisse !).

– FIN –