

Mathématiques 2

Examen Partiel — 03/04/2017

Durée : 1h30. Documents, calculatrices et portables interdits.

Exercice 1

Exercice 1 Dans \mathbb{R}^3 , considérons la famille de vecteurs suivante :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ainsi que le vecteur } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver les coordonnées du vecteur w dans la base \mathcal{B} .

Exercice 2

1. Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z - t = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2. Donner la dimension et une base de F .
3. Dans \mathbb{R}^4 , trouver le rang de la famille de vecteurs suivante:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Donner une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
5. A-t-on $F \oplus \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 3

On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 & 3 \\ 2 & 1-t & 2t-1 & -6 \\ -4 & 2t-2 & 2t+2 & t+7 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la matrice A_t .
2. Justifier le fait que la matrice A_1 , obtenue pour $t = 1$, est inversible et calculer son inverse.
3. Soit A_0 la matrice obtenue pour $t = 0$. Résoudre l'équation matricielle

$$A_0 \cdot X = \vec{0},$$

d'inconnue $X \in \mathbb{R}^4$.