Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L2 Mathématiques Générales **Analyse 2**

Théorèmes de Dini

à rendre le 8 novembre 2017

Exercice 1 (Premier théorème de Dini)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers f continue. Le but de cet exercice est de montrer que la convergence est uniforme.

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et f est la fonction nulle.
2. On fixe $\varepsilon > 0$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n(\varepsilon) = \big\{x \in [a,b]; f_n(x) < \varepsilon\big\}.$$

   (a) Montrer que $V_{n+1}(\varepsilon) \subset V_n(\varepsilon)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $V_n(\varepsilon)$ est un ouvert de $[a,b]$.
   (c) Montrer que $[a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n(\varepsilon)$: c'est une égalité d'ensembles, il faut donc montrer l'inclusion de l'un dans l'autre, et inversement.
   (d) En déduire qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $[a,b] = V_{N_\varepsilon}(\varepsilon)$. On pourra utiliser la propriété de Borel-Lebesgue (de tout recouvrement d'un segment $[a,b]$ par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini).

3. Conclure.

Exercice 2 (Deuxième théorème de Dini)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues croissantes sur un intervalle $[a,b]$ qui converge simplement sur $[a,b]$ vers f continue. Le but de cet exercice est de montrer que la convergence est uniforme.

1. Montrer que f est croissante sur $[a,b]$.
2. On fixe $\varepsilon > 0$. Quel est le théorème qui permet d'affirmer l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| \leq \delta$ on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$?
3. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a,b]$ ($a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{n_0-1} < a_{n_0} = b$, n_0 dépend de δ et donc de ε) vérifiant : pour tout $x \in [a,b]$, il existe $i \in \{0,1,...,n_0-1\}$ tel que $|f(x) - f(a_i)| \leq \varepsilon$.
4. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $i \in \{0,1,...,n_0\}$, on a $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$.
5. En utilisant la croissance des fonctions f_n, montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $i \in \{0,1,...,n_0-1\}$ tel que pour tout $n \geq N$: $|f_n(x) - f(a_i)| \leq 2\varepsilon$.
6. En déduire que pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$.
7. Conclure.

Exercice 3 (Application)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \tfrac{1}{2}\big(x - f_n(x)\big)^2, \quad x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que f_n est polynômiale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quel est son degré ?
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on déterminera. On montrera d'abord la convergence simple, puis la convergence uniforme en utilisant un des théorèmes de Dini.