Faculté des Sciences Aix-Marseille Université

Année universitaire 2017-2018

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence Maths
Code du module : SMI3U1TC Libellé du module : Analyse 2
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Calculatrices et documents interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Questions de cours 1.

1. Donner la définition d'une série numérique absolument convergente et donner un exemple de série convergente non absolument convergente.
2. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. (On attend ici une définition, pas une formule pour le calculer).
3. Quand peut-on dire que la limite d'une suite de fonctions dérivables est dérivable ? (On demande un théorème du cours, mais pas sa démonstration).

Exercice 2 (Séries numériques).

1. Quelle est la nature de la série numérique $\sum\big(\sqrt{n}\cos\frac{1}{n}-\sqrt{n}\big)$ $(n\geq 1)$? Justifier.
2. Dire pourquoi la série $\sum\frac{4}{n^2-4}$ $(n\geq 3)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3 (Séries de fonctions). Pour $n\geq 1$ et $x\in\mathbb{R}$, on note $f_n(x)=\frac{\sin^2(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble $D\subset\mathbb{R}$ pour lequel $\sum f_n(x)$ est une série convergente. On note $S(x)$ sa somme $(x\in D)$.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D. Que peut-on en déduire sur la régularité de S sur D ?
3. Étudier $\sum f_n'$: convergence simple, uniforme sur des intervalles de $\mathbb{R}$ à déterminer.

Et, au choix, l'un des deux exercices suivants :

Exercice 4 (Séries entières).

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\frac{z^{2n}}{n2^n}$ $(n\geq 1)$.
2. Que se passe-t-il sur le cercle de convergence $|z|=R$ (convergence de la série) ?

Exercice 5 (Séries entières et équations différentielles).

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\frac{(n-1)z^n}{n+1}$ $(n\geq 2)$. Pour $|z|<R$, on note $f(z)$ sa somme.
2. Existe-t-il une solution développable en série entière $y(x)=\sum a_n x^n$ à l'équation différentielle
$$x^2y''+xy'-y=f\ ?$$
Si oui, quel est son rayon de convergence ?