

Petit formulaire bien utile

Formules trigonométriques

On rappelle que les fonctions sinus et cosinus sont définies sur \mathbb{R} , prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ et sont 2π -périodiques, la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, prend ses valeurs dans \mathbb{R} et est π -périodique.

$$\begin{array}{lll} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} & 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x & \tan(-x) = -\tan x \\ \sin(\pi - x) = \sin x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x & \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x} \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x & \cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2 \cos^2 x - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 x \end{cases} & \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \end{array}$$

lorsque, dans la dernière ligne, $t = \tan(\frac{x}{2})$.

Les formules d'addition et transformation de sommes en produits

$$\begin{array}{ll} \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a & \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \\ \cos p + \cos q = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2}) & \cos p - \cos q = -2 \sin(\frac{p+q}{2}) \sin(\frac{p-q}{2}) \\ \sin p + \sin q = 2 \sin(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2}) & \sin p - \sin q = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \sin(\frac{p-q}{2}) \end{array}$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi),$$

où φ vérifie

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Quelques limites

$$\frac{\sinh h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1, \quad \frac{1 - \cosh h}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}, \quad \frac{\tanh h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Dérivées - Primitives

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} , la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{array}{lll} \sin'(x) = \cos x & \cos'(x) = -\sin x & \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \int \sin x dx = -\cos x + c & \int \cos x dx = \sin x + c & \int \tan x dx = \ln |\cos x| + c \end{array}$$

Notation trigonométrique pour les nombres complexes

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \cos x = \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \sin x = \Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Fonctions hyperboliques

On rappelle que les fonctions sinus hyperbolique sh, cosinus hyperbolique ch et tangente hyperbolique th sont définies sur \mathbb{R} . Par définition,

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

En particulier, on a

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction sh prend ses valeurs dans \mathbb{R} , la fonction ch prend ses valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et la fonction th prend ses valeurs dans l'intervalle $] -1, 1[$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1 & \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & 1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ \operatorname{sh}(-x) &= -\operatorname{sh} x & \operatorname{ch}(-x) &= \operatorname{ch} x & \operatorname{th}(-x) &= -\operatorname{th} x \\ \operatorname{sh} 2x &= 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x & \operatorname{ch} 2x &= \begin{cases} \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \\ 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \end{cases} & \operatorname{th} 2x &= \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}. \end{aligned}$$

Les formules d'addition et transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a & \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\ \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) & \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) & \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Dérivées - Primitives

Les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont dérivables sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch} x & \operatorname{ch}'(x) &= \operatorname{sh} x & \operatorname{th}'(x) &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ \int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch} x + c & \int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh} x + c & \int \operatorname{th} x \, dx &= \ln(\operatorname{ch} x) + c \end{aligned}$$

Fonctions réciproques

Si on restreint les ensembles de définition du sinus, du cosinus et de la tangente, il est possible d'obtenir des fonctions bijectives.

L'application $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. Son application réciproque est appelée arcsinus

$$\operatorname{arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\operatorname{arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\sin(\operatorname{arcsin} x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arcsin}(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ -x + (2k+1)\pi & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'application $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. Son application réciproque est appelée arccosinus

$$\operatorname{arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi];$$

elle est dérivable sur $] - 1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour tout } x \in] - 1, 1[.$$

De plus, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arccos x) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x + 2k\pi & \text{si } x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi] \\ x - 2k\pi & \text{si } x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'application $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Son application réciproque est appelée arctangente

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[;$$

elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vaut

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On fait maintenant la même chose pour les fonctions hyperboliques.

L'application $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument sinus hyperbolique

$$\text{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

elle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée vaut

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'argument sinus hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

L'application $\text{ch} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique

$$\text{argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[;$$

elle est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée vaut

$$\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{pour tout } x > 1.$$

L'argument cosinus hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

L'application $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est bijective. Son application réciproque est appelée argument tangente hyperbolique

$$\text{argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R};$$

elle est dérivable sur $] - 1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{pour tout } x \in] - 1, 1[.$$

L'argument tangente hyperbolique s'exprime aussi de la façon suivante :

$$\text{argth } x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{pour tout } x \in] - 1, 1[.$$

Quelques identités remarquables

- Somme des premiers termes d'une progression géométrique :

$$1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1, \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

- Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) :

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

En particulier,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{et} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

- Somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Binôme de Newton (pour $a, b \in \mathbb{C}$) :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

...

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{et } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k.$$

- Somme de sinus et cosinus : pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x) = n+1$ et $S_n(x) = 0$.

Quelques primitives

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\},$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\int \operatorname{ch} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\int \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad x \in]-1, 1[,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{argsh} x + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \operatorname{argch} x + c & \text{si } x \geq 1 \\ -\operatorname{argch}(-x) + c & \text{si } x \leq -1 \end{cases},$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + c, \quad x \neq \pm 1,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{argth} x + c, \quad x \in]-1, 1[.$$