DM1 - Calcul intégral

à rendre le mardi 14 février

Exercice 1 (Sommes de Riemann). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. On note

$$\Delta_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{1}{k}\right), \quad n \geq 1.$$

1. Justifier que $\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Soit $n \geq 1$ fixé. On note $m_k = \min_{x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} f'(x)$ et $M_k = \max_{x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} f'(x)$ pour tout $1 \leq k \leq n$.
   (a) En utilisant l'intégrabilité au sens de Riemann de f', montrer que
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0),$$
   puis que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) - f(0)$.
   (b) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, on a : $\frac{1}{2n^2} m_k \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n^2} M_k$.
   (c) En sommant la double inégalité précédente sur k, en déduire que
   $$-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k \leq \Delta_n \leq -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} m_k.$$
3. En déduire que $(n\Delta_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 (Développement asymptotique de la série harmonique). Pour tout $n \geq 1$, on note

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a
   $$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1 + \ln n.$$
3. Donner un équivalent de H_n lorsque n tend vers l'infini.
4. Montrer que $(H_n - \ln n)_{n\geq 1}$ est une suite positive décroissante. En déduire qu'elle est convergente. On appelle γ sa limite (γ est la constante d'Euler dont les 25 premiers chiffres du développement décimal sont : $\gamma \simeq 0,5772156649015328606065120$.)
5. On voudrait trouver le terme suivant dans le développement asymptotique de la série harmonique, c'est-à-dire trouver un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $H_n - \ln n - \gamma$. Pour tout $k \geq 1$, on note $\alpha_k = \frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.
   (a) Montrer que $\alpha_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. Trouver un équivalent de α_n lorsque n tend vers l'infini.
   (b) En déduire que $\sum \alpha_n$ est une série convergente. Montrer que
   $$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire un équivalent de $H_n - \ln n - \gamma$ lorsque n tend vers l'infini.