

DM2 - Calcul intégral

à rendre le mardi 28 février

Le but du problème est de trouver la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Pour cela, on utilisera les théorèmes vus en cours sur les intégrales à paramètre (en particulier, le théorème de convergence dominée).

1. Rappeler pourquoi l'intégrale généralisée (en 0 et à l'infini) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

2. Soit $t > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ est absolument convergente.

3. On définit pour $t \geq 0$ la fonction F par

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Montrer que F est continue en 0.

4. Montrer que $F(t)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$. Donner cette limite.

5. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

6. En déduire une expression de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

7. Que vaut $F(0)$?