TD2 - Fractions rationnelles, Intégrales généralisées

Exercice 1 (Fractions rationnelles)**.** 1. Soit $R(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$.

(a) Décomposer R en éléments simples.

(b) Donner les intervalles sur lesquels R admet des primitives.

(c) Déterminer les primitives de R.

2. Soit $F(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

(a) Décomposer F en éléments simples.

(b) Donner les intervalles sur lesquels F admet des primitives.

(c) Déterminer les primitives de F.

Exercice 2 (Intégrales absolument convergentes)**.** Déterminer la convergence (ou non) des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$\int_1^{2} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x\ ; \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 (Intégrales semi-convergentes)**.** 1. Montrer que $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2. Montrer que l'intégrale précédente n'est pas absolument convergente.

3. Que peut-on dire de la série de terme général $\left(\frac{\cos n}{n}\right)_{n\geq 1}$?

Exercice 4 (Lien séries-intégrales)**.** En utilisant les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}\,\mathrm{d}x$, dire pour quel(s) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les séries $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ $(n \geq 2)$ sont convergentes.