Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L2 Mathématiques Générales **Analyse 2**

TD 0 – Rappels sur les suites numériques dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 1 (Convergence au sens de Cesàro)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors il en est de même pour la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.
3. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas mais pour laquelle la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
4. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors $(S_n)_{n\geq 1}$ est aussi croissante.
5. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors $(S_n)_{n\geq 1}$ est aussi bornée.
6. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 (Suites adjacentes)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(ii) $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

De telles suites sont appelées adjacentes.

1. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
3. Exemple 1 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes. En déduire que e n'est pas rationnel.
4. Exemple 2 : Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ convergent vers la même limite appelée constante d'Euler (notée γ). Montrer que $0 \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 3 (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante et convexe sur $[a,b]$ vérifiant $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Montrer que l'intervalle $[\alpha, b]$ est stable par φ.
3. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in]\alpha, b]$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Illustrer cette suite sur un dessin.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Montrer que la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique, c'est-à-dire que $|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2$ où C est une constante à déterminer.

6. Exemple (algorithme de Héron): Appliquer la méthode précédente à la fonction $f(x) = x^2 - A$ où $A > 0$ pour déterminer $\alpha = \sqrt{A}$. En particulier, trouver une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 4 (Critère de convergence vers zéro)**.** Soit $(u_n)n \in \mathbb{N}$ une suite telle que à partir d'un certain rang N on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \ell < 1$ pour un nombre réel fixé ℓ. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple : pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = 0$.

Exercice 5 (Suites extraites d'indices pair et impair)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que cette suite converge vers une limite ℓ si et seulement si les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices pairs et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices impairs convergent vers cette même limite ℓ.

Exercice 6 (Caractérisation équivalente d'une valeur d'adhérence d'une suite)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit a une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a quand $k \to +\infty$, $(n_k = \varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ désignant une suite d'entiers naturels strictement croissante vérifiant donc $\varphi(k+1) > \varphi(k)$, et donc aussi $\varphi(k) = n_k \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adherence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si on a :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists\, n_0 \geq N \quad \text{tel que} \quad |x_{n_0} - a| \leq \epsilon.$$

Exercice 7 (Limites inférieure et supérieure d'une suite réelle)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, et donc par exemple $u_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \inf\big\{u_k,\ k \geq n\big\}$ et $b_n = \sup\big\{u_k,\ k \geq n\big\}$.

(*i*) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

(*ii*) En déduire qu'il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

On définit ainsi la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\ell = \liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \big(\inf_{k\geq n} u_k\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

De façon analogue, on définit la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$L = \limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \big(\sup_{k\geq n} u_k\big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée ou majorée, on généralise ces définitions avec $\ell, L \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
N.B. Les $\liminf$ et $\limsup$ d'une suite réelle existent donc toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui n'est pas le cas de la limite d'une suite, même dans $\overline{\mathbb{R}}$. On montre que ce sont respectivement la plus petite et plus grande valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de cette suite.

Exercice 8 (Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$))**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, et donc par exemple $u_n \in [a, b]$pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \inf\big\{u_k,\ k \geq n\big\}$ et $\beta_n = \sup\big\{u_k,\ k \geq n\big\}$.

1. Montrer qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\varphi(n) \geq n$) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|u_{\varphi(n)} - \alpha_n| \leq \dfrac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$.

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \alpha = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, *i.e.*, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $\alpha \in [a, b]$ comme valeur d'adhérence.

   On peut aussi montrer directement que $\alpha = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \in [a, b]$ ou $\beta = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \in [a, b]$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Autre démonstration avec un processus récurrent de dichotomie.*

(a) On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\varphi(0) = 0$. Construire, par récurrence avec un procédé de dichotomie, deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que l'ensemble d'entiers naturels $E_n = \{k \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_k \leq b_n\}$ soit infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On choisit alors $\varphi(n) = \min(E_n \setminus \{0, 1, \cdots, \varphi(n-1)\})$, vérifiant donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on justifiera pourquoi ce minimum existe.

(c) En déduire que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers la limite commune $\ell \in [a, b]$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En conclure que *de toute suite bornée, on peut extraire une suite qui converge, soit encore que toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

N.B. On en déduit alors facilement la version analogue dans $\mathbb{C}$ en considérant la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'argument ou parties réelle et imaginaire.

Exercice 9 (Suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et complétude de ($\mathbb{K}$, $|.|$)). 1. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée et en déduire qu'elle a au moins une valeur d'adhérence.

2. Montrer que si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

3. En déduire que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge.

   On dira que $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) muni de $|.|$ est un espace vectoriel normé (e.v.n.) *complet.*

Exercice 10 (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$, critère de Cauchy et suites récurrentes). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement contractante, *i.e.*, vérifiant pour un certain réel $k \in [0, 1[$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|, \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Pour x_0 donné dans $\mathbb{R}$, on définit la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $f(a) = a$ et $f(b) = b$, alors $a = b$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

3. En déduire qu'elle converge, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, vers l'unique point fixe $\ell = f(\ell)$ de la fonction f.

4. Montrer l'estimation ci-dessous de l'erreur au rang n :

$$|x_n - l| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0|, \quad \forall\, n \geq 1.$$

5. *Application :* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = \cos(x_n)$; montrer que l'on a pour $\ell = \cos \ell$

$$|x_n - \ell| \leq \frac{(\sin 1)^n}{1 - \sin 1}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

N.B. Cette méthode itérative pour approcher la solution de l'équation $x - f(x) = 0$ s'appelle la *méthode des approximations successives de Picard.*