TD 1 – Topologie des espaces métriques

Exercice 1 (Boules ouvertes et fermées)**.** Montrer que dans un espace métrique, les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermées sont des fermés, les sphères sont fermées.

Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon. Que se passe-t-il dans un espace métrique quelconque ?

Exercice 2 (Distances ne provenant pas d'une norme)**.** On considère E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

Pour $k \geq 2$, on note $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right]$ et $N_{\infty,k}$ la norme du sup sur $\mathscr{C}(I_k)$: $N_{\infty,k}(f) = \sup_{I_k} |f|$ pour tout $f \in \mathscr{C}(I_k)$.

1. Montrer que la restriction à I_k d'une fonction de E appartient à $\mathscr{C}(I_k)$.
2. Sur E, on définit

$$d : E \times E \to [0,\infty[, \quad d(f,g) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_{\infty,k}(f-g)}{1 + N_{\infty,k}(f-g)}, \quad f,g \in E.$$

   Montrer que la somme infinie intervenant dans la définition de $d(f,g)$ est convergente pour tout $f,g \in E$.

3. Montrer que pour $a,b \in \mathbb{R}$, $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.
4. En déduire que d est une distance sur E, puis que d ne provient pas d'une norme.
5. Montrer que (E,d) est complet.

Exercice 3 (Suite convergente et compact)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (E,d) qui converge vers un point $x \in E$. Montrer que l'ensemble

$$\big\{x_n, n \in \mathbb{N}\big\} \cup \{x\}$$

est un compact de E.

Exercice 4 (Normes p)**.** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. Pour chaque $1 \leq p < \infty$, on définit la norme p sur E par

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in E$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme sur E pour tout $p \in [1,\infty[$. Que se passe-t-il si $0 < p < 1$?
2. Montrer que pour $0 < p < 1$, d_p définie par

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p, \quad f,g \in E,$$

   est une distance sur E.

3. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
4. Pour quel(s) p l'espace $(E, \|\cdot\|_p)$ est-il complet ?

Exercice 5 (Suites de Cauchy)**.** Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

1. Montrer que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que s'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors la suite complète $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6 (Formes linéaires)**.** Soit $L : E \longmapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que L est continue si, et seulement si, le noyau de L est fermé dans E.

2. Montrer que L n'est pas continue si, et seulement si, le noyau de L est dense dans E.

Exercice 7 (Continuité des opérations élémentaires dans un evn)**.**

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que
$$m : \mathbb{R} \times E \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in E$$
est continue sur $\mathbb{R} \times E$, puis que
$$a : E \times E \ni (x, y) \longmapsto x + y \in E$$
est continue sur $E \times E$.

2. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés. Montrer que la composition des applications linéaires est continue. Autrement dit, montrer que
$$c : \mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G) \ni (u,v) \longmapsto v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$$
est continue sur $\mathscr{L}(E,F) \times \mathscr{L}(F,G)$.