Université d'Aix-Marseille **Année 2018-2019**
L2 maths St Charles **Topologie-Calcul différentiel**

Examen partiel

Vendredi 15 mars 2019

La qualité de la rédaction entrera de manière importante dans la note finale. Tous les théorèmes utilisés doivent être cités en entier : hypothèse(s) et conclusion(s) (on ne demande pas leur démonstration sauf indication contraire).

Questions de cours.

a) Donner la définition d'une norme.

b) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

   i) Montrer que $B_N^f(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n ; N(x) \leq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

   ii) Quel est l'intérieur de $B_N^f(0,1)$?

   iii) (Bonus) Démontrez que l'intérieur de $B_N^f(0,1)$ est effectivement ce que vous avez affirmé dans la question précédente.

c) Démontrer le résultat suivant : une fonction lipschitzienne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue sur Ω.

Exercice 1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $N(x,y) = \max\{|x-y|, |x+y|\}$.

a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

b) Dessiner la boule unité fermée pour N.

c) Pourquoi N est-elle équivalente à la norme infinie $N_\infty : (x,y) \mapsto \max\{|x|,|y|\}$?

d) Trouver des constantes explicites $\alpha, \beta > 0$ montrant que N est équivalente à N_∞.

Exercice 2. Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| < |\cos x| + 1 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$.

a) i) Écrire A comme intersection de deux images réciproques par des fonctions bien choisies d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

   ii) Que peut-on en déduire pour A ? Justifiez !

b) i) Quelle est l'adhérence de A ?

   ii) (Bonus) Démontrez que l'adhérence de A est effectivement ce que vous avez affirmé dans la question précédente.

Exercice 3. Soit $k \geq 1$. On note P_k le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{k^2 \ln k}{1+k^3}\right)$.

a) i) La suite $(P_k)_{k\geq 1}$ est-elle convergente dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme N définie dans l'exercice 1 ?

   ii) Si oui, quelle est sa limite ?

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$. Que peut-on dire de la suite $(f(x_k,y_k))_{k\geq 1}$? Justifiez !