Corrections
Partiel 1

Exercice 1 :

1. L'image de A par la fonction f s'écrit : $\boxed{f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}}$.
2. L'image réciproque de B par la fonction f s'écrit : $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$.
3. On dit que f est injective si : $\boxed{\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)}$.
4. On dit que f est surjective si : $\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y}$.

Exercice 2 :

1. La négation de l'assertion (A) s'écrit : $\boxed{(\forall m \in \mathbb{R}),\ (\exists x \in \mathbb{R}),\ (x > m\ \wedge\ f(x) \leq m)}$.
2. On va montrer que la fonction f vérifie la négation de l'assertion (A).
   Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $x = |m| + 1$, alors d'une part $x > |m|$, donc $x > m$. D'autre part, $f(x) = -(|m| + 1) \leq m$.
   La fonction f vérifie donc la négation de l'assertion (A), donc f ne vérifie pas (A).
3. Montrons que la fonction g vérifie (A). Pour cela, on pose $m = 0$. Si x est un réel vérifiant $x > 0$ alors $g(x) = x > 0 = m$. Donc la fonction g vérifie (B).

Exercice 3 :

1. La négation de (X) s'écrit :
$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y \leq x\ \vee\ \cos(y) \leq \cos(x))}$$
   La négation de (Y) s'écrit :
$$\boxed{\exists t \in \mathbb{R},\ \left(t < \frac{1}{5}\right)\ \wedge\ \left[\forall z \in \mathbb{R},\ z \leq 5\ \vee\ \frac{1}{z} \geq t\right]}.$$
2. La réciproque de (Y) s'écrit :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left(\exists z \in \mathbb{R},\ z > 5\ \wedge\ \frac{1}{z} < t\right)\ \Rightarrow\ t < \frac{1}{5}}.$$
   La contraposée de (Y) s'écrit :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left(\forall z \in \mathbb{R},\ z \leq 5\ \vee\ \frac{1}{z} \geq t\right)\ \Rightarrow\ t \geq \frac{1}{5}}.$$
3. L'assertion (X) est fausse : pour le prouver, il suffit de démontrer sa négation. On pose $x = 0$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\cos(y) \leq 1 = \cos(x)$. En particulier, on a $y \leq x$ ou $\cos(y) \leq \cos(x)$. Ceci montre que la négation de (X) est vraie, donc que $\boxed{\text{(X) est fausse}}$.
   L'assertion (Y) est fausse. Là encore, il suffit de montrer que la négation de (Y) est vraie. Soit $t = 0$. On voit tout d'abord que $t < \frac{1}{5}$. En outre, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a soit $z \leq 5$, soit $z > 5$, auquel cas $\frac{1}{z} \geq 0 = t$. Ainsi, dans tous les cas, $z \leq 5$, ou $\frac{1}{z} \geq t$. Ceci montre que la négation de (Y) est vraie, donc que $\boxed{\text{(Y) est fausse}}$.

Exercice 4 :

A : On peut répondre à la question en commençant par dessiner les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto |3x+1|$ et $x \mapsto |x+1|$. Ces deux courbes s'intersectent en deux points : x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$. On remarque alors que la courbe de la fonction $x \mapsto |3x+1|$ est (strictement) en-dessous de la courbe de la fonction $x \mapsto |x+1|$ lorsque $x \in]x_1, x_2[$, donc $A =]x_1, x_2[$. Il reste à calculer ces deux points d'intersection : x_1 vérifie $-3x_1 - 1 = x_1 + 3$, donc $x_1 = -1$. x_2 vérifie $3x_2 + 1 = x_2 + 3$ donc $x_2 = 1$. Ainsi $A =]-1, 1[$.

On peut répondre aussi à la question de façon plus rigoureuse. La fonction $x \mapsto 3x+1$ est positive sur $[-1/3, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x+3$ est positive sur $[-3, +\infty[$.
On décompose A sous la forme : $A = (A \cap]-\infty, -3]) \cup \left(A \cap]-3, -\frac{1}{3}[\right) \cup \left(A \cap [-\frac{1}{3}, +\infty[\right)$ et on calcule chacune de ces intersections.

$$\begin{aligned} A \cap]-\infty, -3] &= \{x \in \mathbb{R};\ -(3x+1) < -(x+3)\} \cap]-\infty, -3] \\ &= \{x \in \mathbb{R};\ 2x - 2 > 0\} \cap]-\infty, -3] \\ &=]1, +\infty[\cap]-\infty, -3] \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap]-3, -\frac{1}{3}[&= \{x \in \mathbb{R};\ -(3x+1) < x+3\} \cap]-3, -\frac{1}{3}[\\ &= \{x \in \mathbb{R};\ 4x + 4 > 0\} \cap]-3, -\frac{1}{3}[\\ &=]-1, +\infty[\cap]-3, -\frac{1}{3}[\\ &=]-1, -\frac{1}{3}[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap [-\frac{1}{3}, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R};\ 3x+1 < x+3\} \cap [-\frac{1}{3}, +\infty[\\ &= \{x \in \mathbb{R};\ x < 1\} \cap [-\frac{1}{3}, +\infty[\\ &=]-\infty, 1[\cap [-\frac{1}{3}, +\infty[\\ &= [-\frac{1}{3}, 1[. \end{aligned}$$

Ainsi $A =]-1, -\frac{1}{3}[\cup [-\frac{1}{3}, 1[$, donc $\boxed{A =]-1, 1[}$.

B : On réécrit $B = \{x \in \mathbb{R};\ |2x-3| > 2\}$ sous la forme $B = \left(B \cap]-\infty, \frac{3}{2}]\right) \cup \left(B \cap]\frac{3}{2}, +\infty[\right)$. Donc :

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ -(2x-3) > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 2x - 3 > 2\}$$
$$\boxed{B =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[}$$

C : A partir de $A =]-1, 1[$, on en déduit : $\boxed{C =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$.

$A \cap B$: On obtient : $\boxed{A \cap B =]-1, \frac{1}{2}[}$.

$B \cup C$: Cette union s'écrit : $\boxed{B \cup C =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [1, +\infty[}$.

Exercice 5 :

1. Pour tout réel x, $1+x^2 \neq 0$, donc le dénominateur de la fraction définissant la fonction f ne s'annule pas, donc la fonction f est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$.

2. En calculant les images de 2 et de $\frac{1}{2}$ par f, on obtient : $\boxed{f(\{2, \dfrac{1}{2}\}) = \{\dfrac{4}{5}\}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Alors $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$. En multipliant le numérateur et le dénominateur par x^2, le calcul donne : $f(\frac{1}{x}) = \frac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{2x}{x^2+1} = f(x)$.

4. La fonction f n'est pas injective car $\boxed{\dfrac{4}{5} \text{ a au moins 2 antécédents }}$: 1 et $\frac{1}{2}$.

5. Pour trouver les antécédents de l'élément $\frac{1}{3}$, on résout : $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{3}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{3}(x^2+1) \Leftrightarrow 6x = x^2+1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

   On est donc amené à la résolution de cette équation polynômiale de degré 2. Les solutions sont :

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \text{ et } x = 3 - 2\sqrt{2}.$$

   Donc $\boxed{f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{3}\right\}\right) = \{3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}\}}$.

6. Pour tout réel x, on a d'une part : $(1-x)^2 \geq 0$. Donc en développant l'identité remarquable, on trouve $1+x^2 \geq 2x$. Ainsi, $1 \geq \frac{2x}{1+x^2}$, donc $\boxed{1 \geq f(x)}$.

   D'autre part : $(1+x)^2 \geq 0$, donc $2x \geq -(1+x^2)$, ainsi $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$, c'est-à-dire : $\boxed{f(x) \geq -1}$.

7. L'espace d'arrivée de la fonction f est $\mathbb{R}$ et de plus f est bornée (par 1) d'après la question précédente, autrement dit, f prend ses valeurs dans $[-1, 1]$. Donc $\boxed{\text{la fonction f n'est pas surjective}}$.