

## Introduction à l'analyse

## Devoir maison n°2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant les relations

$$(E) \quad \begin{cases} f' = 3f - 4g, \\ g' = f - g \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Le but de ce problème est de trouver toutes les fonctions  $f$  et  $g$  vérifiant  $(E)$ .

1. Supposons que deux fonctions  $f$  et  $g$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifient  $(E)$ . On définit  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient

$$f = 2v \quad \text{et} \quad g = u + v.$$

- (i) Dire pourquoi  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .
  - (ii) Déterminer l'équation différentielle (homogène) vérifiée par  $u$ .
  - (iii) Donner la forme de toutes les solutions de l'équation différentielle trouvée au (ii).
  - (iv) Déterminer l'équation différentielle (avec second membre) vérifiée par  $v$  et la résoudre.
  - (v) En déduire la forme de  $f$  et  $g$ .
2. Inversement, montrer que toutes les fonctions  $f$  et  $g$  trouvées au 1.(v) sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifient  $(E)$ .
3. Conclusion ?