Introduction à l'analyse

Éléments de correction de la première interrogation

Rappels de cours

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$. Elle est $2\pi-$périodique et paire. Elle vérifie de plus $\cos(\pi - x) = -\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,\pi]$ et vérifie

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \text{pour } x \in [0,\pi].$$

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$. Elle est $2\pi-$périodique et impaire. Elle vérifie de plus $\sin(\pi - x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$, prend ses valeurs dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, est impaire et vérifie

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad \text{pour } x \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}].$$

Question 1 : Que vaut $\arccos(\cos x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$?

Question 2 : Que vaut $\arcsin(\sin x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}$?

Réponse 1 :

Notons $f(x) = \arccos(\cos x)$: d'après les rappels de cours, f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est paire, $2\pi-$périodique, et

• $f(x) = x$ pour $x \in [0,\pi]$.

Par parité de f, on en déduit donc que

• $f(x) = -x$ pour $x \in [-\pi,0]$.

Ainsi, on connaît f sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ qui correspond à une période. Pour obtenir f sur $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit de décaler ce qu'on vient d'obtenir.

- Sur un intervalle du type $[0+2k\pi,\pi+2k\pi]$, on a $f(x) = f(x-2k\pi) = x-2k\pi$ car $x-2k\pi \in [0,\pi]$.
- Sur un intervalle du type $[-\pi+2k\pi,0+2k\pi]$, on a $f(x) = f(x-2k\pi) = -(x-2k\pi)$ car $x-2k\pi \in [-\pi,0]$.

L'expression générale de f est alors

$$f(x) = \begin{cases} -x+2k\pi & \text{si} \quad x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], \\ x-2k\pi & \text{si} \quad x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : Lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$, les ensembles

$$[(2k-1)\pi, 2k\pi] \cup [2k\pi, (2k+1)\pi] = [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$$

parcourent $\mathbb{R}$ tout entier.

Réponse 2 :

Notons $g(x) = \arcsin(\sin x)$: d'après les rappels de cours, f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est impaire, $2\pi-$périodique, et

• $g(x) = x$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De plus, comme $g(\pi - x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\sin(\pi - x) = \sin x$ comme rappelé plus haut), on a

• $g(x) = \pi - x$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

En effet, si $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, alors $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et donc $g(\pi - x) = \pi - x$ d'après le premier point.

Ainsi, on connaît g sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ qui correspond à une période. Pour obtenir g sur $\mathbb{R}$ tout entier, il suffit de décaler ce qu'on vient d'obtenir.

- Sur un intervalle du type $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, on a $g(x) = g(x - 2k\pi) = x - 2k\pi$ car $x - 2k\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Sur un intervalle du type $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, on a $g(x) = g(x - 2k\pi) = \pi - (x - 2k\pi)$ car $x - 2k\pi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

L'expression générale de g est alors

$$g(x) = \begin{cases} x-2k\pi & \text{si} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi], \\ (2k+1)\pi - x & \text{si} \quad x \in [\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi], \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque : Lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$, les ensembles

$$[-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi, \tfrac{\pi}{2}+2k\pi] \cup [\tfrac{\pi}{2}+2k\pi, \tfrac{3\pi}{2}+2k\pi] = [-\tfrac{\pi}{2}+2k\pi, \tfrac{3\pi}{2}+2k\pi]$$

parcourent $\mathbb{R}$ tout entier.