

Introduction à l'analyse

Interrogation de cours 2

1. Donner toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + y = 2 \cosh 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. On note f la solution de (E) qui vaut 2 en 0. Étudier la fonction f .

La factorisation suivante pourra être utile au cours du raisonnement :

$$X^4 - 4X + 3 = (X - 1)^2(X^2 + 2X + 3).$$

Réponse :

1. D'après le cours, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de (E) , on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. En remplaçant dans (E) , λ doit vérifier $\lambda'(x) = e^{3x} + e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on peut donc prendre $\lambda(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, une solution particulière de (E) est $y_0(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E) est alors (d'après le cours) :

$$y(x) = \lambda e^{-x} + y_0(x) = \lambda e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La solution f de (E) qui vaut 2 en 0 est de la forme trouvée au à la question 1. où λ doit vérifier $\lambda + \frac{1}{3} - 1 = 2$. Ainsi, $\lambda = \frac{8}{3}$ et donc

$$f(x) = \frac{8}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} - e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On trouve comme dérivée de f :

$$f'(x) = -\frac{8}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} + 2e^{-2x} = \frac{2}{3}e^{-2x}(-4e^x + e^{4x} + 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant étudier de signe de f' : en utilisant la factorisation donnée dans l'énoncé (en posant $X = e^x$), on obtient :

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{-2x}(e^x - 1)^2(e^{2x} + 2e^x + 3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne alors le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		+
f	$-\infty$	$+\infty$

↗

En effet, il est facile de voir que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et en utilisant l'expression de f suivante

$$f(x) = -e^{-2x}\left(1 - \frac{1}{3}e^{4x} - \frac{8}{3}e^x\right),$$

on voit aussi que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.