

Introduction à l'analyse

Interrogation de cours 2

1. Donner toutes les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - y = 2 \cosh 2x, \quad x \in \mathbb{R},$$

2. On note f la solution de (E) qui vaut -2 en 0. Étudier la fonction f .

La factorisation suivante pourra être utile au cours du raisonnement :

$$3X^4 - 4X^3 + 1 = (X - 1)^2(3X^2 + 2X + 1).$$

Réponse :

1. D'après le cours, la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est de la forme

$$y(x) = \lambda e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière de (E), on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$, où $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. En remplaçant dans (E), λ doit vérifier $\lambda'(x) = e^x + e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on peut donc prendre $\lambda(x) = e^x - \frac{1}{3}e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, une solution particulière de (E) est $y_0(x) = e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E) est alors (d'après le cours) :

$$y(x) = \lambda e^x + y_0(x) = \lambda e^x + e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. La solution f de (E) qui vaut -2 en 0 est de la forme trouvée au à la question 1. où λ doit vérifier $\lambda + 1 - \frac{1}{3} = -2$. Ainsi, $\lambda = -\frac{8}{3}$ et donc

$$f(x) = -\frac{8}{3}e^x + e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On trouve comme dérivée de f :

$$f'(x) = -\frac{8}{3}e^x + 2e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-2x} = \frac{2}{3}e^{-2x}(-4e^{3x} + 3e^{4x} + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant étudier de signe de f' : en utilisant la factorisation donnée dans l'énoncé (en posant $X = e^x$), on obtient :

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{-2x}(e^x - 1)^2(3e^{2x} + 2e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne alors le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		+
f	$-\infty$	$+\infty$

↗

En effet, il est facile de voir que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et en utilisant l'expression de f suivante

$$f(x) = e^{2x} \left(1 - \frac{8}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-4x} \right),$$

on voit aussi que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.