Université Aix-Marseille 2012–2013

Introduction à l'analyse

Parcours PEIP

Planche 2 Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) = 3y(x)$ avec $y(0) = 3$;

b) $y'(x) + \pi y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$;

c) $3y'(x) = y(x)$ avec $y(1) = -1$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = -5f'(x)$ pour tout x. On suppose que la courbe représentant f dans le repère orthonormé passe par le point $(-2, 1)$. Déterminer f et tracer sa courbe.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle (E) $y' + y = \cos(x)$, et l'équation sans second membre associée (e) $y' + y = 0$.

a) Trouver une solution de (E) sous la forme $y(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

b) Résoudre (e).

c) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 4.

a) Trouver une fonction g de la forme $g(x) = ae^{-x}$ telle que $g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$$

avec comme conditions initiales $y(0) = 1$.

Exercice 5. L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une auto-inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la $f.é.m$ appliquée aux extrémités.

Résoudre l'équation différentielle

a) quand $E(t) = E_0$ constante ; b) quand $E(t) = E_0 \sin(wt)$.

Exercice 6. On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 7. Dans cet exercice, on se propose de résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1 mais avec coefficients non constants. On considère donc l'équation

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{E}$$

où a et b sont deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.

a) On commence par considérer l'équation homogène

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \tag{e}$$

.

i) Montrer que y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \exp\left(\int_0^x a(t)dt\right)$ est solution de (e).

ii) Montrer que, pour toute solution y de (e), la fonction $\frac{y}{y_0}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de dérivée nulle.

iii) En déduire toutes les solutions de (e).

b) On considère maintenant connue une solution y_p de l'équation (E). Montrer que toute les solutions de (E) sont de la forme $y_p + Ay_0$ où A est un réel.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle (E) $y'(x) - 2xy(x) = x$

et l'équation sans second membre associée (e) $y'(x) - 2xy(x) = 0$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(x) = C$ est-elle solution de (E)?

b) Résoudre (e) ; puis en déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 9. On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) + (x-1)y(x) = e^{-x}$$

1. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = ae^{-x}$.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$;

b) $2xy'(x) + y(x) = x^3$;

c) $(1+x^2)y'(x) + xy(x) - 2x = 0$;

d) $x(x-1)y'(x) - (2x-1)y(x) + x^2 = 0$.

Exercice 11. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

b) $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -2$.

c) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 13. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = Ae^{2x}$ où A est une constante.

b) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ sachant que $y(0) = y'(0) = 0$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = e^{4x}(Ax+B)$ où A, B sont des constantes.

c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$. Chercher une solution particulière de la forme $y(x) = A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ où A, B sont des constantes.

Exercice 14.

a) Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \tag{E_1}$$

en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.

b) On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \tag{E_2}$$

Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x. Puis résoudre (E_2).

Exercice 15.

a) On considère l'équation différentielle, dite de l'oscillateur harmonique libre :

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = 0 \tag{e}$$

où ω_0 est une constante.

Déterminer les valeurs de ω_0 telles qu'il existe une solution f à (e), non identiquement nulle, et telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

b) On considère maintenant l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique forcé :

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \cos(\omega x) \tag{E}$$

où ω_0 et ω sont des constantes.

En discutant selon les valeurs de ω_0 et ω, résoudre (E).

Exercice 16. On décrit ci-dessous 5 processus physiques, et donne 6 équations différentielles, parmi lesquelles se cachent celles associées aux processus décrits.

1) Associez à chaque processus son équation, en expliquant clairement votre choix.

2) En vous aidant de la description des phénomènes physiques, expliquez quelle sera l'évolution dans le temps de la quantité physique intéressante, notée X dans tous les cas.

3) Résolvez les équations, et dessinez les solutions. Vérifiez que vos prédictions de la seconde question sont correctes.

Voici la liste des processus :

Processus A : Une certaine proportion $X(t)$ du carbone d'un os enfoui sous terre est radioactive. A chaque instant, un fraction du carbone radioactif émet un fort rayonnement et redevient normal.

Processus B : Des bactéries vivantes sont dans un bol avec une solution nutritive, et un médicament qui les attaque. Elles mangent et se multiplient mais sont aussi tuées par le médicament, dont chaque molécule, une fois sa victime achevée se déplace vers une autre cible. $X(t)$ est le nombre de bactéries vivantes.

Processus C : Deux élatisques sont attachées sur une balle, en deux points diamètralement opposés. Les élastiques sont tendus et leur autre extrêmité est attachée pour l'un au plafond, pour l'autre au sol. On descend légèrement la balle par rapport à sa position d'équilibre, on attend un instant, puis on la lâche. Son déplacement par rapport à l'équilibre est $X(t)$.

Processus D : Une pierre de curling est lancée sur une patinoire. La distance parcourue depuis le point de départ est $X(t)$. Les forces de friction amènent petit à petit la pierre au repos.

Processus E : L'eau est pompée d'un lac à vitesse constante. Le volume d'eau dans le lac est $X(t)$.

Et la liste des équations, avec des constantes a et b positives :

$$\begin{array}{ll} \text{équation 1 :} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -aX + b & \text{équation 2 :} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -aX \\ \text{équation 3 :} \dfrac{dX}{dt} = -aX & \text{équation 4 :} \dfrac{dX}{dt} = -b + aX \\ \text{équation 5 :} \dfrac{d^2X}{dt^2} = -a\dfrac{dX}{dt} & \text{équation 6 :} \dfrac{dX}{dt} = -a \end{array}$$

Exercice 17. Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$.

a) Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E)?

b) Trouver deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$.

c) En déduire une primitive de $\dfrac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).

d) Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 18. On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note $N(t)$ le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant t, exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}\big(N(t)\big)^2,$$

avec, comme condition initiale, $N(0) = 1$.

a) Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = \frac{1}{N}$.

b) Déterminer h puis N.

c) Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?

Exercice 19. Trouver toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(1 - x).$$