

Unicité dans L^d des solutions du système de Navier-Stokes : cas des domaines lipschitziens

Sylvie Monniaux¹

Résumé

On prouve l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes incompressible dans $\mathcal{C}([0, T]; L^d(\Omega)^d)$, où Ω est un domaine lipschitzien borné de \mathbb{R}^d ($d \geq 3$).

1 Introduction

On s'intéresse dans cet article au système de Navier-Stokes incompressible dans des domaines fortement lipschitziens bornés de \mathbb{R}^d , avec donnée au bord de Dirichlet et donnée initiale u_0 à divergence nulle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla \pi &= 0 & \text{dans} & (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 & \text{dans} & (0, T) \times \Omega \\ u &= 0 & \text{sur} & (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) &= u_0 & \text{dans} & \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Plus particulièrement, on étudie le problème de l'unicité des solutions u du système (1.1) ayant la régularité $\mathcal{C}([0, T]; L^d(\Omega)^d)$, si elles existent. Dans le cas de l'espace tout entier ($\Omega = \mathbb{R}^d$), la preuve de l'unicité de telles solutions est due à G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo dans [6]. D'autres preuves mettant en oeuvre des méthodes originales ont suivi ; on citera en particulier Y. Meyer [9], P.-L. Lions et N. Masmoudi [8] et S. Monniaux [10]. Tous ces résultats sont présentés dans le livre de P.-G. Lemarié-Rieusset [7]. Dans les articles [8] et [10], la méthode utilisée s'adapte au cas des domaines réguliers bornés de \mathbb{R}^d ; on pourra aussi citer l'article de H. Amann [1]. Le

¹Ce travail a été effectué lors d'une visite de l'auteur au Center of Mathematics and its Applications, Australian National University, Canberra - Australie.

cas des domaines extérieurs à frontière régulière a été étudié par N. Depauw [3] ; notons que la preuve de [10] s'adapte aussi dans ce cas. On pourra se reporter à la très complète présentation de cet historique par M. Cannone dans [2].

Le cas des domaines lipschitziens est plus délicat. Le semi-groupe de Stokes permettant de donner une expression des solutions du système (1.1) dans les cas précédents n'est pas analytique dans L^p pour tout p ; P. Deuring dans [4] en a donné des contre-exemples. M. Taylor, dans [14], établit la conjecture que le semi-groupe de Stokes est analytique dans L^p pour tout $p \in [\frac{3}{2}, 3]$, s'appuyant sur le caractère borné du projecteur de Leray dans cet intervalle (voir [5]). Mais à ce jour, aucune preuve de ce résultat n'est disponible. Une version faible de l'analyticité en dimension 3 peut être trouvée dans [11]. L'auteur dans [12] a contourné ce problème de non analyticité en utilisant un résultat de Z. Shen [13] pour montrer, en dimension 3, l'unicité des solutions de (1.1) dans la classe des fonctions continues en temps, à valeurs L^3 en variable d'espace. Nous proposons ici une adaptation de cette méthode aux domaines lipschitziens bornés Ω de dimension quelconque $d \geq 3$ afin de montrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1) dans $\mathcal{C}([0, T]; L^d(\Omega)^d)$.

Cet article se compose de trois parties. Dans un premier temps, nous rappelons le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) qui est la clé de la démonstration proposée ici. Ensuite, nous nous intéressons au problème de Stokes linéaire non autonome : nous donnons les estimations qui seront utiles dans la dernière partie. Enfin, nous établissons le résultat d'unicité annoncé plus haut.

2 Le problème de Stokes avec donnée au bord

Nous allons commencer cette partie en rappelant la propriété de régularité maximale du laplacien dans \mathbb{R}^d ($d \geq 3$) qui nous sera utile dans différentes démonstrations. On note $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur dans \mathbb{R}^d ; son action est donnée par la convolution par le noyau de la chaleur $(p_t)_{t > 0}$ défini sur \mathbb{R}^d par $p_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 2.1: *Soit $T > 0$ (on autorise aussi le cas $T = +\infty$). Soit \mathcal{M}_T*

UNICITÉ POUR NAVIER-STOKES DANS LES DOMAINES LIPSCHITZIENS

l'opérateur défini sur les fonctions régulières de $(0, T) \times \mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{M}_T f(t) = \left(\frac{d}{dt} - \Delta \right)^{-1} (-\Delta f)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (-\Delta f)(s) ds, \quad t \in (0, T).$$

Alors pour tous $p, q \in (1, \infty)$, l'opérateur \mathcal{M}_T est borné de $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ dans $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d))$ et $\|\mathcal{M}_T\|_{\mathcal{L}(L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^d)))}$ est indépendante de T .

DÉMONSTRATION: Ce résultat est classique. On pourra en trouver une démonstration dans [7], Theorem 7.3, page 64. \square

Soit maintenant, et dans toute la suite de cet article, Ω un domaine fortement lipschitzien de dimension $d \geq 3$, soit $\tau > 0$. On considère le problème au bord suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla q &= 0 & \text{dans} & \quad (0, \tau) \times \Omega \\ \operatorname{div} v &= 0 & \text{dans} & \quad (0, \tau) \times \Omega \\ v &= g & \text{sur} & \quad (0, \tau) \times \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où g est une fonction définie sur $(0, \tau) \times \partial\Omega$. Soit K est la matrice $d \times d$ donnée par l'expression

$$K_{i,j}(t, x) = \delta_{i,j} p_t(x) + \int_t^\infty \frac{\partial^2 p_s}{\partial x_i \partial x_j}(x) ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

où p_t , $t > 0$, est le noyau de la chaleur dans \mathbb{R}^d défini plus haut. Le théorème de Shen ([13], Theorem 5.1.2) établissant l'existence et l'unicité de solution du système (2.1) pour certaines données au bord g s'énonce de la manière suivante :

Théorème 2.2: *On note $L^2_N(\partial\Omega)^d$ l'espace des fonctions $\gamma \in L^2(\partial\Omega)^d$ telles que $\int_{\partial\Omega} \gamma \cdot N d\sigma = 0$, où N désigne la normale extérieure en un point de $\partial\Omega$. Il existe un opérateur borné $\mathcal{T} : L^2(0, \tau; L^2_N(\partial\Omega)^d) \rightarrow L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)$ tel que pour toute fonction $g \in L^2(0, \tau; L^2_N(\partial\Omega)^d)$, il existe une unique solution $v \in L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ de (2.1) donnée par la formule de potentiel double couche suivante*

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial N(y)}(t-s, y-x) (\mathcal{T}g)(s, y) d\sigma(y) ds \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \frac{y-x}{|y-x|^3} (\mathcal{T}g)(t, y) \cdot N(y) d\sigma(y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour $x \in \Omega$ et $t \in (0, \tau)$. De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g telle que

$$\|v\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \kappa \|g\|_{L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)}. \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION: L'existence et le caractère borné de l'opérateur \mathcal{T} ainsi que l'expression (2.2) ont été montrés par Shen dans [13], Theorem 5.1.2. Il reste à prouver la propriété d'intégrabilité de la solution v donnée par (2.2) et l'inégalité (2.3). Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{D}((0, \tau) \times \Omega)^d$; il nous faut estimer la quantité

$$\int_0^\tau \int_\Omega v(t, x) \cdot \varphi(t, x) dx dt$$

par la norme de g dans $L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)$ multipliée par la norme de φ dans l'espace dual de $L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$, c'est-à-dire $L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)$. D'après (2.2) et l'expression de K en fonction du noyau de la chaleur dans \mathbb{R}^d , on a

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega v(t, x) \cdot \varphi(t, x) dx dt \\ = & \int_0^\tau \int_\Omega dx dt \\ & \sum_{i=1}^d \left\{ \varphi_i(t, x) \left(\int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{\partial K_{i,j}}{\partial N(y)}(t-s, y-x) (\mathcal{T}g)_j(s, y) d\sigma(y) ds \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\partial\Omega} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^d} [(\mathcal{T}g)(t, y) \cdot N(y)] d\sigma(y) \right) \right\} \\ = & \int_0^\tau \int_\Omega dx dt \\ & \sum_{i=1}^d \left\{ \varphi_i(t, x) \left(\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p_{t-s}}{\partial N(y)}(y-x) (\mathcal{T}g)_i(s, y) d\sigma(y) ds \right. \right. \\ & + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial N(y)} \left[\int_{t-s}^\infty \frac{\partial^2 p_r}{\partial x_i \partial x_j}(y-x) dr \right] (\mathcal{T}g)_j(s, y) d\sigma(y) ds \\ & \left. \left. - \int_{\partial\Omega} \frac{y_i - x_i}{|y-x|^d} [(\mathcal{T}g)(t, y) \cdot N(y)] d\sigma(y) \right) \right\} \end{aligned}$$

Si on note encore φ la fonction de $(0, \tau) \times \mathbb{R}^3$ qui vaut φ sur $(0, \tau) \times \Omega$ et 0

ailleurs, en échangeant l'ordre d'intégration, cette dernière égalité devient

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \int_\Omega v(t, x) \cdot \varphi(t, x) dx dt \\
 = & \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) ds \\
 & \sum_{i=1}^d (\mathcal{T}g)_i(s, y) \left[\frac{\partial}{\partial N(y)} \left(\int_s^\tau e^{(t-s)\Delta} \varphi_i(t, \cdot) dt \right) (y) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial N(y)} \int_s^\tau \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left\{ \int_{t-s}^\infty e^{r\Delta} \varphi_j(t, \cdot) dr \right\} (y) \right) dt \right] \\
 & - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} (-\Delta I_d)^{-1} \varphi(t, \cdot))(y) (\mathcal{T}g)(t, y) \cdot N(y) d\sigma(y) dt \\
 = & \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\mathcal{T}g)(s, y) \cdot (N(y) \cdot \nabla) [(-\Delta I_d)^{-1} \mathbb{P} \mathcal{M}^* \varphi](s, y) d\sigma(y) dt \\
 & - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} (-\Delta I_d)^{-1} \varphi(t, \cdot))(y) [(\mathcal{T}g)(t, y) \cdot N(y)] d\sigma(y) dt,
 \end{aligned}$$

où I_d est l'identité sur \mathbb{R}^d , \mathbb{P} est le projecteur de Leray ($\mathbb{P} = I_d + \nabla(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}$; c'est la projection sur les fonctions à divergence nulle) et \mathcal{M}^* est l'opérateur dual de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{+\infty} I_d$ ($\mathcal{M}_{+\infty}$ est l'opérateur de régularité maximale défini dans la Proposition 2.1). Des propriétés du laplacien dans \mathbb{R}^d nous déduisons les estimations suivantes

$$\|\operatorname{div} (-\Delta I_d)^{-1} \varphi\|_{L^2(0, \tau; W^{1, \frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|\nabla [(-\Delta I_d)^{-1} \mathbb{P} \mathcal{M}^* \varphi]\|_{L^2(0, \tau; W^{1, \frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq C_2 \|\varphi\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

D'après les propriétés de l'opérateur de trace sur $\partial\Omega$ et les injections de Sobolev appropriées, on obtient alors

$$\|Tr_{\partial\Omega} [\operatorname{div} (-\Delta I_d)^{-1} \varphi]\|_{L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega))} \leq C'_1 \|\varphi\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}$$

et

$$\|Tr_{\partial\Omega} (N(\cdot) \cdot \nabla) [(-\Delta I_d)^{-1} \mathbb{P} \mathcal{M}^* \varphi]\|_{L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)} \leq C'_2 \|\varphi\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)}.$$

Ces deux dernières estimations ainsi que l'expression du produit scalaire de v par φ nous permettent alors de conclure. \square

3 Estimations des solutions du problème linéaire non autonome

Nous nous intéressons maintenant au problème de Stokes non autonome suivant

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \pi &= f & \text{dans} & (0, \tau) \times \Omega \\
 \operatorname{div} u &= 0 & \text{dans} & (0, \tau) \times \Omega \\
 u &= 0 & \text{sur} & (0, \tau) \times \partial\Omega \\
 u(0, \cdot) &= 0 & \text{dans} & \Omega.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous allons déterminer dans le théorème suivant pour quelles fonctions f ce système (3.1) admet une solution u avec de “bonnes” propriétés.

Théorème 3.1: *Pour tout $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$, pour tout $f \in L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$, il existe une solution $u \in L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ unique de (3.1) vérifiant*

$$\|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \omega_r(\tau) \|f\|_{L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)}, \tag{3.2}$$

où $\omega_r(\tau) = O(\tau^{\frac{d+1}{4} - \frac{d}{2r}})$.

DÉMONSTRATION: L'idée est ici d'étendre le problème à \mathbb{R}^d tout entier, puis de se ramener à un problème au bord du type (2.1). Soit $r \in [\frac{2d}{d+1}, 2[$ et $f \in L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On étend f à \mathbb{R}^d tout entier de telle façon que l'extension notée \tilde{f} vérifie

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq c \|f\|_{L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)},$$

où c est une constante indépendante de f . On note alors

$$\begin{aligned}
 U &= \mathbb{P}(-\Delta I_d)^{-\frac{1}{2}} (\mathcal{M}_\tau I_d) (-\Delta I_d)^{-\frac{1}{2}} \tilde{f} \\
 &= \mathbb{P} \left(\frac{d}{dt} \right)^{-1} (-\Delta I_d)^{\frac{1}{2}} (I_d - \mathcal{M}_\tau I_d) (-\Delta I_d)^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}
 \end{aligned}$$

où l'opérateur de régularité maximale \mathcal{M}_τ a été défini dans la Proposition 2.1. On a donc $U \in L^2(0, \tau; W^{1,r}(\mathbb{R}^d)^d) \cap W^{1,2}(0, \tau; W^{-1,r}(\mathbb{R}^d)^d)$ et il existe une constante $\gamma_r > 0$ indépendante de f et de τ telle que

$$\|U\|_{L^2(0, \tau; W^{\frac{d}{r} - \frac{d-1}{2}, r}(\mathbb{R}^d)^d)} \leq \gamma_r \tau^{\frac{d+1}{4} - \frac{d}{2r}} \|f\|_{L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)}.$$

Les propriétés de l'opérateur de trace ainsi que les injections de Sobolev nous montrent alors que $T_{\partial\Omega}U \in L^2(0, \tau; L^2(\partial\Omega)^d)$, de norme contrôlée indépendamment de τ par la norme de f dans $L^2(0, \tau; W^{-1,r}(\Omega)^d)$. On considère alors

l'unique v donné par (2.2) du Théorème 2.2 avec $g = T_{\partial\Omega}U$. Ainsi, en notant R_Ω la restriction à Ω des fonctions définies sur \mathbb{R}^d , la fonction $u = R_\Omega U - v$ est l'unique solution de (3.1) cherchée. Finalement, (3.2) découle de l'injection de Sobolev suivante

$$W_{r, \frac{d-1}{2}, r}^{\frac{d}{r} - \frac{d-1}{2}}(\Omega)^d \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d$$

en dimension d . Ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1. \square

4 Unicité des solutions continues en temps, à valeurs dans L^d

Tous les outils sont maintenant en place pour démontrer l'unicité des solutions du système de Navier-Stokes (1.1).

Théorème 4.1: *Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions de (1.1) dans l'espace $\mathcal{C}([0, T]; L^d(\Omega)^d)$. Alors $u_1 = u_2$ sur $[0, T]$.*

Remarque: En dimension $d = 3$, ce théorème a déjà été démontré dans [12].

DÉMONSTRATION: Pour montrer que $u_1 = u_2$, nous appliquons la méthode classique qui consiste à montrer que leur différence $u = u_1 - u_2$ est nulle sur un petit intervalle partant de 0. La continuité des solutions implique que l'ensemble des t pour lesquels $u(t) = 0$ est fermé dans $[0, T]$. D'autre part, la preuve qui suit montre que cet ensemble est non vide et ouvert. On en déduit alors que $u = 0$ sur $[0, T]$. Comme le domaine Ω est borné et $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0, T]; L^d(\Omega)^d)$, on a aussi $u_1, u_2 \in L^2(0, T; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$; en effet, pour $d \geq 3$, on a $\frac{2d}{d-1} \leq d$. Le but de la démonstration suivante est de montrer que la norme de u dans $L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ est nulle pour un $\tau > 0$.

Dans un premier temps, soit $p \in]\frac{2d}{d-1}, \frac{2d}{d-2}[$ et $u_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)^d$ à choisir plus tard. Le système (1.1) vérifié par u_1 et u_2 devient pour u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla \pi &= -\nabla \cdot (u \otimes u_1 + u_2 \otimes u) && \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, \cdot) &= 0 && \text{dans } \Omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

On pose $f = -\nabla \cdot (u \otimes u_1 + u_2 \otimes u)$ et on décompose cette distribution en trois parties : $f = f_1 + f_2 + f_3$ avec $f_1 = -\nabla \cdot (u \otimes (u_1 - u_0) + (u_2 - u_0) \otimes u)$,

SYLVIE MONNIAUX

$f_2 = -\nabla \cdot (u \otimes (u_0 - u_{0,\varepsilon}) + (u_0 - u_{0,\varepsilon}) \otimes u)$ et $f_3 = -\nabla \cdot (u \otimes u_{0,\varepsilon} + u_{0,\varepsilon} \otimes u)$.
On a les propriétés suivantes pour tout $\tau \in (0, T]$:

$$f_1, f_2 \in L^2(0, \tau; W^{-1, \frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d) \quad \text{et} \quad f_3 \in L^2(0, \tau; W^{-1, r}(\Omega)^d)$$

où r est défini par la relation $\frac{1}{r} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p}$: $r \in]\frac{2d}{d+1}, 2[$. On a de plus les estimations

$$\|f_1\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, \frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \leq \|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \cdot \left[\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)} \right],$$

$$\|f_2\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, \frac{2d}{d+1}}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d}$$

et

$$\|f_3\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, r}(\Omega)^d)} \leq 2\|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d}.$$

D'après le Théorème 3.1 de la partie précédente (appliqué à chacune des f_i , $i = 1, 2, 3$) et l'estimation (3.2), il existe alors une unique solution $u \in L^2(0, T; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)$ vérifiant pour tout $\tau \in (0, T]$

$$\|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \left[\|f_1\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, \frac{2d}{d+1}})} + \|f_2\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, \frac{2d}{d+1}})} \right] + \omega_r(\tau) \|f_3\|_{L^2(0, \tau; W^{-1, r})}.$$

Ainsi, on a une estimation de u de la forme :

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \\ & \leq \left(\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) [\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)}] \right. \\ & \quad \left. + 2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d} + 2\omega_r(\tau) \|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d} \right) \cdot \|u\|_{L^2(0, \tau; L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}. \end{aligned}$$

On choisit maintenant $u_{0,\varepsilon} \in L^p(\Omega)^d$ de telle façon que

$$2\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) \|u_0 - u_{0,\varepsilon}\|_{L^d(\Omega)^d} < \frac{1}{4}.$$

D'autre part, comme u_1 et u_2 sont continues en temps et valent u_0 en 0, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \|u_2 - u_0\|_{L^\infty(0, \tau; L^d(\Omega)^d)} = 0.$$

De plus, comme $r \in]\frac{2d}{d+1}, 2[$, on a

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_r(\tau) = 0.$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que

$$\omega_{\frac{2d}{d+1}}(\tau) [\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,\tau;L^d(\Omega)^d)} + \|u_2 - u_0\|_{L^d(\Omega)^d}] + 2\omega_r(\tau)\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)^d} < \frac{1}{4}.$$

Ainsi pour le τ choisi, on a

$$\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(0,\tau;L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)^d)}.$$

Ce qui implique que $u = 0$ sur $[0, \tau)$, et ceci termine la démonstration. \square

Bibliographie

- [1] H. Amann. On the strong solvability of the Navier-Stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 2:16–98, 2000.
- [2] M. Cannone. Mr 2002j:76036. *Mathematical Reviews, American Mathematical Society*, 2002.
- [3] N. Depauw. Solutions des équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine extérieur. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 17:21–68, 2001.
- [4] P. Deuring. The Stokes resolvent in 3D domains with conical boundary points : nonregularity in L^p -spaces. *Adv. Differential Equations*, 6:175–228, 2001.
- [5] E. Fabes, O. Mendez, and M. Mitrea. Boundary layers on Sobolev-Besov spaces and Poisson’s equation for the Laplacian in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 159:323–368, 1998.
- [6] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset, and E. Terraneo. Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ et d’autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16:605–667, 2000.
- [7] P.-G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. Chapman & Hall, Boca Raton, 2002. CRC Research Notes in Mathematics 431.

SYLVIE MONNIAUX

- [8] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N . *Comm. Partial Differential Equations*, 26:2211–2226, 2001.
- [9] Y. Meyer. Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations. In *Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA)*, pages 105–212. Int. Press, Boston, MA, 1997.
- [10] S. Monniaux. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p -regularity. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 328:663–668, 1999.
- [11] S. Monniaux. Existence of solutions in critical spaces of the Navier-Stokes system in 3D bounded Lipschitz domains. Preprint, 2002.
- [12] S. Monniaux. On uniqueness for the Navier-Stokes system in 3D-bounded Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 195:1–11, 2002.
- [13] Z. Shen. Boundary value problems for parabolic Lamé systems and a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations in Lipschitz cylinders. *Amer. J. Math.*, 113:293–373, 1991.
- [14] M. Taylor. Incompressible fluid flows on rough domains. In *Semigroups of operators: theory and applications (Newport Beach, CA, 1998)*, pages 320–334. Birkhäuser, Basel, 2000. *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 42.

SYLVIE MONNIAUX
UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE 3
LATP - UMR 6632 - CASE COUR A
AV. ESCADRILLE NORMANDIE-NIEMEN
13397 MARSEILLE CÉDEX
FRANCE
sylvie.monniaux@univ.u-3mrs.fr