Numéro d'ordre : 478 Année 1995

Projet de thèse

en vue d'obtenir le diplôme de docteur de l'Université de Franche-Comté en **Mathématiques et Applications**.

Générateur analytique et régularité maximale

par **Sylvie Monniaux**

Soutenance prévue le jeudi 28 septembre 1995 à 15 h dans l'amphi B, bâtiment Métrologie, UFR Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex.

Jury de soutenance :

Wolfgang ARENDT	Professeur à l'Université de Franche-Comté, Directeur de thèse
Jean-Bernard BAILLON	Professeur à l'Université Lyon 1, Rapporteur,
Philippe BÉNILAN	Professeur à l'Université de Franche-Comté, Examinateur,
Robert DEVILLE	Professeur à l'Université Bordeaux 1, Rapporteur,
Matthias HIEBER	Professeur associé à l'Université de Franche-Comté, Examinateur,
Christian LE MERDY	Chargé de recherches à l'Université de Franche-Comté, Examinateur,
Jan PRÜSS	Professeur à l'Université de Halle, Allemagne, Rapporteur.

Dans une thèse, la page de remerciements est traditionnellement l'occasion de citer les personnes qui ont compté, bien que ne figurant pas toujours dans la bibliographie. C'est parfois aussi l'occasion de donner l'historique d'un premier travail de recherche. Quoiqu'il en soit, il est certain que cette page est bien plus lue que le reste... Il faut donc y apporter un soin tout particulier en s'efforçant d'éviter les clichés ; ça ne va pas être simple.

Wolfgang Arendt, mon directeur de thèse, sera tout naturellement et fort justement le premier cité. Après m'avoir encadrée lors de mon mémoire de DEA, il a accepté que je poursuive un moment la recherche sous sa direction. Pendant ces deux années, il a toujours été disponible pour répondre à mes questions... et pour m'en poser d'autres. Il m'a appris les principes de la recherche et m'a fait apprécier ce nouveau type de travail. Pour tout ça, et ce que j'ai oublié, je le remercie vivement. Cette collaboration va se poursuivre, je lui en suis très reconnaissante.

Je ne voudrais pas manquer d'associer Jan Prüss à ce travail. C'est lors de son invitation à Paderborn en juillet 94 que la deuxième partie de cette thèse a vu le jour. Lors d'un deuxième séjour en Allemagne, à Halle, nous avons terminé l'article qui se trouve ici. Pour tout ça, et le reste, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Philippe Bénilan, Matthias Hieber, et Christian Le Merdy qui ont accepté de faire partie du jury, ainsi qu'à Jean-Bernard Baillon, Robert Deville et Jan Prüss, rapporteurs de cette thèse, et ce, pendant les vacances d'été.

Bien entendu, je ne voudrais pas oublier le groupe de travail *BIP*[1]. Les exposés qui y ont été faits m'ont considérablement aidée à y voir plus clair, surtout au début de mes recherches. Je suis très reconnaissante à Mourad Choulli, Valentin Keyantuo, Florence et Gilles Lancien, Christian Le Merdy et bien sûr Wolfgang Arendt qui ont fait partie de *BIP*.

Les discussions (pas toujours mathématiques) auxquelles j'ai pu participer dans le laboratoire de Besançon ont contribué à rendre ces années agréables. Merci à tous, en particulier aux Catherine (Pagani, Vuillemenot) et à Jacques Vernerey pour leur amabilité et leur disponibilité de tous les instants, à Vincent Fleckinger pour ses multiples dépannages informatiques, à Pascale Monat pour la liaison Besançon-Paris et à tous ceux du bureau 401 qui, s'ils ne l'étaient déjà, sont devenus des amis.

Enfin, sans aller jusqu'à remercier tout le voisinage d'ici et d'ailleurs, je voudrais conclure avec une petite pensée pour les personnes de mon entourage non professionnel qui m'ont évité de me prendre trop au sérieux.

1. Abréviation pour "Bounded Imaginary Powers", classe d'opérateurs étudiée plus loin.

Table des matières

Introduction

La théorie des opérateurs qui admettent des puissances imaginaires bornées connaît un essor depuis la fin des années 80, notamment grâce à G. Dore et A. Venni qui ont montré, en 1987, un théorème de régularité maximale [DV87] mettant en œuvre ces opérateurs. Dès 1966, H. Komatsu [Kom66], dans une série d'articles, a étudié certains de ces opérateurs, mais l'application la plus spectaculaire reste le théorème de Dore-Venni [DV87] et ses extensions, dues en particulier à J. Prüss et H. Sohr [PS90]. Par exemple, on peut trouver, dans [DV87], une application au problème de Cauchy

$$(PC) \qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \ 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

sur $L^p(0,T;X)$, $p \in (0,\infty)$, où X est un espace de Banach avec de "bonnes" propriétés géométriques, plus précisément un espace de type UMD. Lorsque A est un opérateur sur X, non borné en général, suffisamment régulier, le théorème de Dore-Venni appliqué à (PC) donne le résultat suivant : pour tout $f \in L^P(0,T;X)$, il existe une unique solution u de (PC) qui appartient à $W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$.

D'autre part, beaucoup plus tôt, I. Ciorănescu et L. Zsidó [CZ76a] ont développé la notion de générateur analytique d'un groupe fortement continu sur un espace de Banach. Leur travail est motivé par la théorie de Tomita-Takesaki ; ils s'intéressent en particulier à des groupes bornés.

Cette thèse est constituée de deux parties qui, toutes les deux, sont liées au théorème de Dore-Venni.

Dans la première partie de ce travail nous reprenons la notion de générateur analytique d'un groupe (non nécessairement borné ici) et nous l'étudions systématiquement. Un des résultats principaux établit le lien entre ces opérateurs et les opérateurs qui admettent des puissances imaginaires bornées : si l'espace X est UMD, alors tout groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur X de type strictement inférieur à π est de la forme $U(s) = A^{is}$, $s \in \mathbb{R}$, pour un certain opérateur sectoriel A, et dans ce cas A est le générateur analytique de U. Cette relation fondamentale est nouvelle et éclaircit davantage le théorème de Dore-Venni qui en est un corollaire facile. Voici quelques détails de la première partie.
Le chapitre 1 est consacré à des rappels sur les puissances imaginaires, que l'on définit pour des opérateurs sectoriels (Définition 1.1 et Définition 1.3) suivant [PS90],

[Prü93]. On donne aussi quelques résultats bien connus sur les espaces UMD, c'est-à-dire les espaces de Banach pour lesquels la transformation de Hilbert définit un opérateur borné
Dans le chapitre 2, on donne la définition (Définition 2.3) et les premières propriétés du générateur analytique et de l'extension analytique d'un groupe fortement continu sur un espace de Banach quelconque. Il est établi, en particulier, que le générateur analytique d'un groupe fortement continu est un opérateur fermé à domaine dense (Proposition 2.10). On donne aussi l'exemple simple des groupes traces de semi-groupes holomorphes d'angle $\frac{\pi}{2}$. Il est montré (Proposition 2.16) d'autre part que les opérateurs qui forment l'extension analytique d'un groupe fortement continu vérifient, dans un certain sens, la propriété de semi-groupe. Les techniques employées ici sont empruntées à I. Ciorănescu et L. Zsidó [CZ76a]. Pour terminer ce chapitre, on montre que, dans le cas où A est un opérateur qui admet des puissances imaginaires bornées A^{is}, $s \in \mathbb{R}$, A est le générateur analytique du groupe $(A^{is})_{s\in\mathbb{R}}$. Ceci montre donc le lien entre la théorie développée ici et la théorie "classique" initialisée par H. Komatsu [Kom66], reprise par H. Triebel [Tri78] et exploitée par G. Dore et A. Venni [DV87] et par J. Prüss et H. Sohr [PS90].
Dans le chapitre 3, on s'intéresse de plus près aux propriétés spectrales du générateur analytique C d'un groupe fortement continu $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$, sous réserve que le type de ce groupe soit strictement inférieur à π, c'est-à-dire que le groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ vérifie une estimation du type $\|U(s)\| \leq Me^{\omega|s|}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ pour $\omega < \pi$. Il est montré en particulier (Proposition 3.5) que si le spectre de C n'est pas égal à $\mathbb{C}$ tout entier, alors il est contenu dans un secteur de la forme $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \ ; \ |\arg(z)| \leq \omega\} \cup \{0\}$. On montre aussi que l'ensemble résolvant $\rho(C)$ est non vide si et seulement si une certaine intégrale singulière est convergente au sens de Cauchy (Proposition 3.6). On obtient alors (Proposition 3.10), lorsque $\rho(C) \neq \emptyset$, une estimation de la résolvante du générateur analytique C. De plus, toujours dans le cas où $\rho(C) \neq \emptyset$, on montre (Proposition 3.14) que l'extension analytique d'un groupe fortement continu est entièrement déterminée par le générateur analytique du groupe. On a ainsi un résultat d'unicité (Proposition 3.15) qui permet de caractériser un groupe de type strictement inférieur à π par son générateur analytique.

La théorie développée permet alors de démontrer une version un peu plus forte du théorème de Dore-Venni dans le chapitre 4 (Corollaire 4.7). C'est une conséquence du fait que, dans un espace de Banach UMD, le générateur analytique d'un groupe fortement continu est sectoriel (Proposition 4.3 et Corollaire 4.4).
Une autre application des chapitres 2 et 3 concerne les espaces de Hardy associés à des groupes bornés. Il s'agit ici de montrer une décomposition de l'espace X en X_+, X_- et X_0 tels que, sous réserve de convergence au sens de Cauchy d'une certaine intégrale singulière (Proposition 4.11), le groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ laisse ces trois sous-espaces invariants. Cette décomposition vérifie (Théorème 4.19 et Corollaire 4.22) :
· $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$, la part de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ dans X_+, est la trace d'un semi-groupe holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur X_+,
· $(U_-(-s))_{s\in\mathbb{R}}$, la part de $(U(-s))_{s\in\mathbb{R}}$ dans X_-, est la trace d'un semi-groupe holo-

morphe d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur X_-,
$\cdot$ X_0 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 du générateur analytique de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.
On peut alors retrouver certains résultats classiques concernant les espaces de Hardy vectoriels, en prenant pour groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ le groupe des translations sur $L^p(\mathbb{R};X)$.
De même, on trouve des résultats analogues pour des groupes 2π-périodiques (Théorème 4.26). En particulier, on peut retrouver les espaces de Hardy vectoriels sur le tore.
Dans la section 4.5, nous rendons compte des rapports précis entre ce travail-ci et les travaux de I. Ciorănescu et L. Zsidó.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à une autre généralisation du théorème de Dore-Venni. Une hypothèse du théorème de Dore-Venni classique est que les résolvantes des deux opérateurs mis en œuvre doivent commuter. Ceci en limite les applications ; en particulier, on ne peut pas, sous cette condition, traiter le problème de Cauchy non autonome, même avec des conditions de régularité fortes.
La deuxième partie de ce travail est constituée de deux chapitres. Le chapitre 5 est une introduction un peu développée de l'article qui constitue le chapitre 6. Cet article, écrit avec J. Prüss, étend le théorème de Dore-Venni au cas où les résolvantes des opérateurs considérés ne commutent pas, mais leurs commutateurs vérifient une estimation notée (5.1) dans le chapitre 5 et (2.6) dans l'article. Le théorème principal de l'article est Theorem 1 dont on peut trouver la démonstration dans la section 4 "Proof of the main results". Les techniques employées sont proches de celles qui sont développées dans [DV87] et [PS90].
La section 3 donne des applications du résultat théorique aux équations d'évolution.
Dans la section 6, on applique le théorème 2 à des équations intégro-différentielles aux dérivées partielles paraboliques.

Première partie

Générateur analytique d'un groupe fortement continu sur un espace de Banach

Chapitre 1

État des lieux

On se propose ici de faire le point sur les connaissances acquises sur les opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées. Dans la suite, $(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach, A est un opérateur (linéaire) fermé sur X à domaine $D(A)$ dense dans X : on note $N(A)$, $R(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$ respectivement le noyau, l'image, l'ensemble résolvant, le spectre de A.

1.1 Opérateurs sectoriels, classe BIP

Il est possible de définir les puissances complexes pour une classe d'opérateurs dits sectoriels. Nous en donnons la définition ci-dessous.

Définition 1.1. *Un opérateur A est dit* **sectoriel** *si, de plus, $N(A) = \emptyset$, $R(A)$ est dense dans X, $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ et*

$$M_0 := \sup_{t>0} \|t(t + A)^{-1}\| < \infty.$$

On note $S(X)$ l'ensemble des opérateurs sectoriels sur X.

Si A est sectoriel, alors il existe un angle $\varphi > 0$ tel que le secteur $\Sigma_\varphi := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; |\arg z| < \varphi\}$ soit contenu dans $\rho(-A)$. En effet, $\rho(-A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $(0, +\infty)$. On peut alors définir l'angle spectral de A de la manière suivante

Définition 1.2. *L'***angle spectral** *φ_A d'un opérateur A sectoriel est défini par*

$$\varphi_A := \inf\{\varphi > 0 \ ; \ \Sigma_{\pi-\varphi} \subset \rho(-A) \ \ et \ \ M_{\pi-\varphi} < \infty\}$$

où $M_\theta := \sup\{\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\|, \ \lambda \in \Sigma_\theta\}, \quad \theta \in (0, \pi)$.

Pour un angle $\theta \in (0, \pi)$, et pour un réel $R > 0$, on définit $S_\theta^R := \Sigma_\theta \cap D(0, R)$ où $D(0, R)$ est le disque (ouvert) de centre 0 et de rayon R. On note Γ_θ^R le bord ∂S_θ^R, orienté dans le sens direct.
Supposons, dans un premier temps, que A est sectoriel, borné, inversible. Soit $\theta \in (\varphi_A, \pi)$ et soit $R > 0$ tel que S_θ^R contienne $\sigma(A)$; ceci est possible car A est borné.

Le calcul fonctionnel de Dunford donne alors le résultat suivant, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $x \in X$,

$$A^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta^R} \lambda^z (\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \Re(z) < 1$, on peut déformer le contour Γ_θ^R en faisant tendre R vers $+\infty$ et θ vers π afin d'obtenir, pour tout $x \in X$

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty t^{z-1} (t + A)^{-1} A x \, dt.$$

Les relations $A(t+A)^{-1} = 1 - t(t+A)^{-1}$ et $(t+A)^{-1}A^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1} - \frac{1}{t}(t+A)^{-1}$, nous permettent d'obtenir la formule suivante, pour tout $x \in X$,

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{z} x - \frac{1}{1+z} A^{-1} x + \int_0^1 t^{z+1} (t+A)^{-1} A^{-1} x \, dt \right.$$
$$\left. + \int_1^\infty t^{z-1} (t+A)^{-1} A x dt \right).$$

On remarque que cette expression est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in (-1, 1)$. Dans le cas où A est un opérateur sectoriel quelconque, la formule précédente donne un sens à $A^z x$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in (-1, 1)$ et $x \in D(A) \cap R(A)$
Remarquons que $D(A) \cap R(A)$ est dense dans X. En effet, pour $x \in X$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_n = n(n+A)^{-1} nA(1+nA)^{-1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_n \in D(A) \cap R(A)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. On est alors en mesure de décrire la classe d'opérateurs $BIP(X)$.

Définition 1.3. *Un opérateur sectoriel admet des* **puissances imaginaires bornées** *si les opérateurs A^{is}, définis comme fermetures de $(A^{is}, D(A) \cap R(A))$ sont bornés pour tout $s \in \mathbb{R}$, et si $\sup\limits_{s \in [-1,1]} \|A^{is}\| < \infty$.*
L'ensemble des opérateurs sectoriels sur X qui admettent des puissances imaginaires bornées est noté $BIP(X)$.

Remarque 1.4. *Soit $A \in BIP(X)$. Alors la famille d'opérateurs bornés $(A^{is})_{s \in \mathbb{R}}$ forme un groupe fortement continu sur X.*

Pour $A \in BIP(X)$, on note ω_A le type du groupe $(A^{is})_{s \in \mathbb{R}}$, c'est-à-dire

$$\omega_A := \lim_{|s| \to \infty} \frac{1}{|s|} \ln \|A^{is}\|.$$

Il est connu que $\omega_A \geq \varphi_A$ (voir par exemple [PS90], [Prü93]). On peut trouver dans [BC91] des exemples d'opérateurs sectoriels n'appartenant pas à $BIP(X)$, même dans le cas où X est un espace de Hilbert.

1.2 Transformation de Hilbert

Nous étudions ici une propriété géométrique des espaces de Banach, liée à l'existence d'un opérateur borné, la transformation de Hilbert. En voici la définition.

Définition 1.5. *On considère les opérateurs $H_{\varepsilon,T}$, définis sur $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$, par*

$$(H_{\varepsilon,T}f)(t) = \frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon \le |s| \le T} f(t-s)\, \frac{ds}{s}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; X)$. Si ces opérateurs admettent une limite forte dans tout $L^p(\mathbb{R}; X)$, $p \in (1, \infty)$, lorsque ε tend vers 0^+ et T tend vers $+\infty$, alors on dit que l'espace de Banach X est de classe $\mathcal{HT}$. On note alors $H := \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ T \to +\infty}} H_{\varepsilon,T}$ et $\mathcal{H}_p := \sup\limits_{\substack{\varepsilon \in (0,1) \\ T > 1}} \|H_{\varepsilon,T}\|_p$.
L'opérateur H est appelé transformation de Hilbert.

Remarque 1.6. *Si on sait que H existe dans un $L^{p_0}(\mathbb{R}; X)$ pour un $p_0 \in (1, \infty)$, alors X est de classe $\mathcal{HT}$.*

Il est aussi connu que la classe $\mathcal{HT}$ coïncide avec les espaces de Banach qui possèdent la propriété UMD (**U**nconditional **M**artingale **D**ifference property). Pour les détails, on pourra se reporter à [Bou83], [Bur86], [Bou86].

Il est possible de définir une notion analogue pour la transformation de Hilbert sur le tore $\mathbb{T} := [-\pi, \pi]$.

Définition 1.7. *On dit qu'un espace de Banach X est de* **classe** $\mathcal{HTT}$ *si la transformation de Hilbert h définie sur les polynômes trigonométriques*

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\cdot} x_k, \quad x_k \in X,\ k \in \{-n, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}$$

par

$$h\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\cdot} x_k\right)(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} sgn(k) e^{ik\theta} x_k, \quad \theta \in \mathbb{T},$$

où $sgn(k) = 1$ si $k > 0$, 0 si $k = 0$, -1 si $k < 0$, se prolonge en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{T}; X)$ pour un $p \in (1, \infty)$.

Remarque 1.8. *Si X est de classe $\mathcal{HTT}$, alors l'opérateur h est borné sur $L^p(\mathbb{T}; X)$ pour tout $p \in (1, \infty)$, et on a la représentation suivante, pour tout $f \in L^p(\mathbb{T}; X)$,*

$$hf = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon \le |s| \le \pi} \frac{f(.-s)}{2\tan(\frac{s}{2})}\, ds.$$

Il est connu qu'un espace de Banach est de classe $\mathcal{HTT}$ si et seulement s'il est de classe $\mathcal{HT}$, voir par exemple [Bou86], [Bur86] ou plus particulièrement [CdP91] dont nous reproduisons la démonstration ci-dessous pour plus de commodité.

Proposition 1.9. *La transformation de Hilbert h définit un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{T};X)$ si et seulement si la transformation de Hilbert H définit un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R};X)$.*

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ est claire. Supposons que h est un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{T};X)$. On pose, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\tilde{H}_{\varepsilon,n}f(t) \;=\; \begin{cases} \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{\frac{\varepsilon}{n}\leq|s|\leq\pi} \frac{1}{2\tan(\frac{s}{2})} f\left(n(\frac{t}{n}-s)\right)\,ds \text{ si } |t|<n\pi, \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^p(\mathbb{R};X)$. Pour $|t| < n\pi$, on a

$$\tilde{H}_{\varepsilon,n}f(t) = \frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq n\pi} \frac{\frac{s}{2n}}{\tan(\frac{s}{2n})}\frac{f(t-s)}{s}\,ds,$$

et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{H}_{\varepsilon,n}f(t) = \tilde{H}_\varepsilon := \frac{i}{\pi}\int_{|s|\geq\varepsilon}\frac{f(t-s)}{s}\,ds.$$

Soit $\alpha > 0$. On note R_α la restriction de $L^p(\mathbb{R};X)$ à $L^p([-\alpha\pi,\alpha\pi];X)$ et E_α l'injection canonique de $L^p([-\alpha\pi,\alpha\pi];X)$ dans $L^p(\mathbb{R};X)$. Soit $D_\alpha : L^p([-\alpha\pi,\alpha\pi];X) \longrightarrow L^p([-\pi,\pi];X)$ tel que $D_\alpha g(t) = g(\alpha t)$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$. On peut remarquer que $\|R_\alpha\| = \|E_\alpha\| = 1$ et $\|D_\alpha\| = \alpha^{\frac{1}{p}}$. On a ainsi, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\tilde{H}_{\varepsilon,n}f = E_n D_n^{-1} h_{\frac{\varepsilon}{n}} D_n R_n f$$

pour tout $f \in L^p(\mathbb{R};X)$ où

$$h_\delta g = \frac{i}{\pi}\int_{\delta\leq|s|\leq\pi}\frac{g(.-s)}{2\tan(\frac{s}{2})}\,ds$$

pour tout $g \in L^p([-\pi,\pi];X)$ et pour tout $\delta \in (0,\pi)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a $\|\tilde{H}_{\varepsilon,n}f\| \leq \|E_n\|\|D_n^{-1}\|\|h_{\frac{\varepsilon}{n}}\|\|D_n\|\|R_n\|\|f\| = \|h_{\frac{\varepsilon}{n}}\|\|f\|$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} h_{\frac{\varepsilon}{n}} = h$, on a $\|\tilde{H}_{\varepsilon,n}f\| \leq \|h\|\|f\|$ pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

D'autre part, soit $\mathcal{E} := \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};X)\ ;\ \mathrm{supp}(f) \text{ compact },\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 0\}$. Cet ensemble $\mathcal{E}$ est dense dans tout $L^p(\mathbb{R};X)$ pour $p \in (1,\infty)$ et pour $f \in \mathcal{E}$, on a, en intégrant par parties, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_\varepsilon f(t) \;&=\; \frac{i\ln\varepsilon}{\pi}(f(t+\varepsilon)-f(t-\varepsilon)) + \frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq1}\ln|s|f'(t-s)\,ds \\ &\quad +\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{t-1} f(s)\,ds + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{t+1} f(s)\,ds - \int_{|s|\geq1}\left(\int_{-\infty}^{t-s} f(\tau)\,d\tau\right)\frac{i\,ds}{\pi s^2},\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\tilde{H}_\varepsilon f(t)$ converge vers

$$\begin{aligned}\tilde{H}f(t) \;&=\; \frac{i}{\pi}\int_{0\leq|s|\leq1}\ln|s|f'(t-s)\,ds + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{t-1} f(s)\,ds \\ &\quad +\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{t+1} f(s)\,ds - \int_{|s|\geq1}\left(\int_{-\infty}^{t-s} f(\tau)\,d\tau\right)\frac{i\,ds}{\pi s^2}\end{aligned}$$

simplement et dans $L^p(\mathbb{R}; X)$.
Ainsi, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, H est un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}; X)$. $\square$

Exemples. Les espaces de Hilbert sont des espaces de classe $\mathcal{HT}$. De même, si (Ω, μ) est un espace mesuré σ-fini, $L^p(\Omega, \mu; Y)$ est de classe $\mathcal{HT}$ si Y l'est et si $p \in (1, \infty)$. L'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas de classe $\mathcal{HT}$, $L^\infty(\mathbb{R})$ non plus.

Chapitre 2

Générateur analytique

Dans cette partie sont donnés les premiers résultats concernant le générateur analytique d'un groupe fortement continu sur un espace de Banach X. Cette notion de générateur analytique de groupe a été introduite et développée par I. Ciorănescu et L. Zsidó [CZ76a], pour des groupes bornés. Une étude systématique de ces opérateurs est présentée ici ; en particulier, on établit le lien qui existe entre les générateurs analytiques de groupes et les opérateurs sectoriels dans la classe $BIP(X)$ définis plus haut. Dans la suite, pour Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathcal{H}ol(\Omega)$ désigne les fonctions (à valeurs vectorielles dans X) holomorphes sur Ω.

2.1 Définitions, exemples

Pour commencer, on donne la définition d'une fonction régulière sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f définie sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans un espace de Banach X est* **régulière** *sur Ω si elle est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.*

Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ 0 < \Re(z) < 1\}$. Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur l'espace de Banach X. Soit $x \in X$ tel qu'il existe une fonction f_x régulière sur Ω, vérifiant $f_x(is) = U(s)x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Une telle fonction f_x, lorsqu'elle existe, est unique. Cette unicité provient du lemme suivant, implication directe du lemme de réflection de Schwartz.

Lemme 2.2. *Soit f une fonction régulière sur la bande $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ a < \Re(z) < b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si la restriction de f sur $\Re(z) = a$ ou la restriction de f sur $\Re(z) = b$ est nulle, alors f est nulle sur $\overline{\mathcal{B}}$.*

Il est maintenant possible de donner la définition du générateur analytique de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.

Définition 2.3. *L'opérateur C défini sur X par*

$$\begin{cases} D(C) := \{x \in X \ ; \ \exists \ f_x \in \mathcal{H}ol(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : f_x(is) = U(s)x, \ s \in \mathbb{R}\} \\ Cx := f_x(1), \quad x \in D(C), \end{cases}$$

est appelé **générateur analytique** *du groupe* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.

On peut définir de manière similaire les opérateurs C_α suivants, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque.
Si $\Re(\alpha) = 0$, $\alpha = is$, $s \in \mathbb{R}$; $D(C_{is}) = X$ et $C_{is}x = U(s)x$ pour tout $x \in X$.
Si $\Re(\alpha) \neq 0$, soit $\Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ 0 < \Re(z) < \Re(\alpha)\}$ si $\Re(\alpha) > 0$ et $\Omega_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(\alpha) < \Re(z) < 0\}$ si $\Re(\alpha) < 0$; on définit

$$\begin{cases} D(C_\alpha) := \{x \in X \ ; \ \exists \ f_x \in \mathcal{H}ol(\Omega_\alpha) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_\alpha}) : f_x(is) = U(s)x, \ s \in \mathbb{R}\} \\ C_\alpha x := f_x(\alpha), \ x \in D(C_\alpha). \end{cases}$$

Ces définitions sont légitimes compte tenu du lemme précédent. La famille d'opérateurs $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est appelée **extension analytique** du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.

Il est aisé de déterminer les opérateurs C_α associés au groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ pour $\Re(\alpha) \geq 0$, dans le cas où le groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est la trace d'un semi-groupe holomorphe $(T(z))_{\Re(z)>0}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens qui suit.

Définition 2.4. *Soit G le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur un espace de Banach X, holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2}$. On dit que S admet une* **trace** *sur $i\mathbb{R}$ si iG engendre un groupe $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continu sur l'espace X.*

Cette définition est en fait suggérée par la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit $(S(z))_{\Re(z)>0}$ un semi-groupe holomorphe sur X, d'angle $\frac{\pi}{2}$, de générateur infinitésimal G. Si $\sup\{\|S(z)\|, \ 0 < \Re(z) < 1, \ |\Im(z)| \leq 1\} < \infty$, alors $\lim_{t\to 0^+} S(t+is)x =: S(is)x$ existe pour tout $x \in X$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, et $(S(is))_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur X de générateur infinitésimal iG. De plus, on a $S(t+is) = S(t)S(is)$, pour $s, t \in \mathbb{R}$.*

On peut trouver des détails dans [HP57] ou [AEH95].

Ainsi, pour chaque $\alpha \in \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(z) \geq 0\}$, on a $D(C_\alpha) = X, \ C_\alpha x = T(\alpha)x, \ x \in X$.

Exemple 2.6. *On considère le semi-groupe de Riemann-Liouville sur $L^p(0,1)$, pour $p \in (1,\infty)$. C'est-à-dire qu'on s'intéresse au semi-groupe holomorphe $(J_p(z))_{\Re(z)>0}$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ défini par*

$$J_p(z)f(t) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^t (t-s)^{z-1} f(s) \ ds, \quad t \in (0,1), \quad f \in L^p(0,1).$$

Ce semi-groupe admet une trace sur $i\mathbb{R}$ (voir par exemple [HP57] ou [AEH95]). On note $(J_p(is))_{s\in\mathbb{R}}$ cette trace ; c'est un groupe fortement continu sur $L^p(0,1)$ et son générateur analytique est donné par

$$J_p(1) : f \in L^p(0,1) \longmapsto \int_0^{\cdot} f(t) \ dt \ \in L^p(0,1).$$

La proposition 2.5 est générique du travail présenté ici. Il s'agit de donner un sens au logarithme d'un opérateur. En effet, si A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu, holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(z) > 0\}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2.5, alors $C = e^A$ est le générateur analytique de $(T(is))_{s\in\mathbb{R}}$. L'opérateur A est donc, dans un certain sens, le logarithme de C.

Remarque 2.7. *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, alors $\dfrac{C}{\lambda}$ est le générateur analytique du groupe $(\lambda^{-is}U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.*

En effet, $(\lambda^{-is}U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur X. De plus, pour tout $x \in D(C)$, la fonction $z \mapsto \lambda^{-z}C_z x$ est régulière sur Ω, prolonge $is \mapsto \lambda^{-is}U(s)x$ et vaut $\dfrac{C}{\lambda}$ en 1.

Dans la suite, nous allons étudier plus en détails le générateur analytique d'un groupe fortement continu quelconque, non nécessairement trace d'un semi-groupe holomorphe.

2.2 Propriété de semi-groupe

Dans un premier temps, on montre que l'extension analytique d'un groupe fortement continu $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est formée d'opérateurs fermés à domaines denses dans X. On en déduit ensuite une relation de semi-groupe vérifiée par ces opérateurs C_α associés au groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.

Lemme 2.8. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, si $x \in D(C_\tau)$, alors $U(\sigma)x \in D(C_\tau)$ et on a $C_{\tau+i\sigma}x = U(\sigma)C_\tau x = C_\tau U(\sigma)x$.*

Preuve. Soit τ et σ fixés dans $\mathbb{R}$. D'après la définition 2.3, il est clair que $D(C_{\tau+i\sigma}) = D(C_\tau)$, car $\Omega_{\tau+i\sigma} = \Omega_\tau$. Soit alors $x \in D(C_\tau)$ fixé ; il existe une fonction f_x régulière sur Ω_τ telle que $f_x(is) = U(s)x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $f_x(\tau) = C_\tau x$. Ainsi, les applications $z \mapsto f_x(z+i\sigma)$ et $z \mapsto U(\sigma)f_x(z)$ sont toutes deux des prolongements réguliers sur Ω_τ de $is \mapsto U(\sigma + s)x = U(\sigma)U(s)x = U(s)U(\sigma)x$. On peut donc en déduire que $U(\sigma)x \in D(C_\tau)$ et d'après le lemme 2.2, ces deux fonctions sont égales sur $\overline{\Omega}_\tau$; en particulier, en $z = \tau$, on a $f_x(\tau + i\sigma) = U(\sigma)f_x(\tau)$. □

Lemme 2.9. *Soit $\mathcal{D} := \{x \in X\ ;\ \exists\ f_x \in \mathcal{H}ol(\mathbb{C}) : f_x(is) = U(s)x,\ s \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble $\mathcal{D}$ est dense dans X.*

Preuve. Soit $x \in X$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}U(t)x\, dt$ est convergente car $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ étant fortement continu, il existe deux constantes K et ω telles que $\|U(s)\| \leq Ke^{\omega|s|}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$x_n := \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}U(t)x\, dt.$$

Comme $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est fortement continu, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Montrons que $x_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose

$$f_n : z \longmapsto f_n(z) := \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(t+iz)^2} U(t)x \; dt.$$

La fonction f_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_n(is) &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(t-s)^2} U(t)x \; dt \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t+s)x \; dt, \text{ où } t := t-s \\ &= U(s)x_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $x_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et donc $\mathcal{D}$ est dense dans X. □

Proposition 2.10. *Pour tout complexe α, $(C_\alpha, D(C_\alpha))$ est un opérateur fermé, à domaine dense dans X.*

Démonstration. Il est suffisant de prouver cette proposition dans le cas $\alpha = 1$. De manière évidente, on a $\mathcal{D} \subset D(C)$. Ainsi, $D(C)$ est dense dans X. Il reste à montrer que $(C, D(C))$ est un opérateur fermé. Soit alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(C)$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ et $(Cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in X$. Le but est alors de montrer que $x \in D(C)$ et $y = Cx$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Comme $x_n \in D(C)$, d'après la définition de $D(C)$, il existe une fonction $f_n \in \mathcal{H}ol(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ telle que $f_n(is) = U(s)x_n$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On sait d'autre part, d'après le lemme précédent, que $f_n(1+is) = U(s)Cx_n$. Ainsi, pour $z \in \overline{\Omega}$, on pose $h_n(z) = e^{z^2} f_n(z)$. Alors $h_n \in \mathcal{H}ol(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \|h_p(z)\| = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut appliquer le principe du maximum à $h_n - h_m$, pour m et $n \in \mathbb{N}$, et on obtient

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} \|h_n(z) - h_m(z)\| \leq \sup_{s\in\mathbb{R}} \left(e^{(1-s^2)} \|U(s)\| \right) \max\{\|x_n - x_m\|, \|Cx_n - Cx_m\|\}.$$

Comme il existe deux constantes K et ω telles que $\|U(s)\| \leq K e^{\omega|s|}$, on a

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \left(e^{(1-s^2)} \|U(s)\| \right) < \infty.$$

Ainsi, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\overline{\Omega}$ vers un fonction h. Il est alors clair que $h \in \mathcal{H}ol(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et vérifie $h(is) = e^{-s^2} U(s)x$ et $h(1+is) = e^{(1+is)^2} U(s)y$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On pose alors $f_x(z) := e^{-z^2} h(z)$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$. Cette fonction f_x est régulière sur Ω et $f_x(is) = U(s)x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a donc montré que $x \in D(C)$ et $y = Cx$. □

Définition 2.11. *Soit $U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur X et soit $x \in X$. On définit la* **suite régularisante** *de x associée au groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ par*

$$x_n := \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)x \, dt, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

D'après le lemme 2.9, $x_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Définition 2.12. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur (non borné) sur X. On dit qu'un sous-espace $\mathcal{E}$ de X est un* **domaine essentiel** *(ou* **core***, en anglais) pour A si, pour tout $x \in D(A)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.*

Proposition 2.13. *Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur X et soit C son générateur analytique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de $x \in X$ associée au groupe U. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé. Alors $x \in D(C_\alpha)$ si et seulement si $(C_\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite convergente, et dans ce cas, $C_\alpha x = \lim_{n\to\infty} C_\alpha x_n$.*
En particulier, $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel pour C_α.

Démonstration. Soit x fixé dans $D(C_\alpha)$. Alors, d'après le lemme 2.8, $U(t)x \in D(C_\alpha)$ et $U(t)C_\alpha x = C_\alpha U(t)x$. Ainsi $C_\alpha x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)C_\alpha x \, dt$ et donc la suite $(C_\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $C_\alpha x$.
La réciproque est évidente car C_α est un opérateur fermé. □

Lemme 2.14. *Soit Λ un opérateur borné sur X qui commute avec le groupe U, i.e. $U(s)\Lambda = \Lambda U(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $x \in D(C_\alpha)$. Alors $\Lambda x \in D(C_\alpha)$ et $C_\alpha \Lambda x = \Lambda C_\alpha x$.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de x associée à U. On a

$$\Lambda x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)\Lambda x \, dt, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

car Λ et U commutent. Ainsi, $\Lambda x_n \in \mathcal{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on a

$$C_z \Lambda x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(t+iz)^2} U(t)\Lambda x \, dt = \Lambda C_z x_n, \quad z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

D'après la proposition 2.13, on a $\lim\limits_{n\to\infty} C_\alpha x_n = C_\alpha x$ et comme $\Lambda \in \mathcal{B}(X)$, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda C_\alpha x_n = \Lambda C_\alpha x$. Ainsi, la suite $(C_\alpha \Lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $\Lambda C_\alpha x$. D'autre part, comme $\Lambda \in \mathcal{B}(X)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda x_n = \Lambda x$. Comme C_α est un opérateur fermé, on obtient donc $\Lambda x \in D(C_\alpha)$ et $C_\alpha \Lambda x = \Lambda C_\alpha x$. □

Remarque 2.15. *On a donc montré qu'à tout groupe fortement continu, on peut associer un opérateur fermé à domaine dense, son générateur analytique suivant la définition 2.3. Mais le générateur analytique ne détermine pas le groupe auquel il est associé.*

Par exemple, si C est le générateur analytique du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$, alors C est aussi le générateur analytique de $\left(e^{2k\pi s}U(s)\right)_{s\in\mathbb{R}}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Plus généralement, si $\{P_k,\ k = 1, ..., n\}$ est une famille de n projections orthogonales telle que pour tout $x \in X$, $\sum_{k=1}^{n} P_k x = x$, alors C est aussi le générateur analytique de $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2\alpha_k \pi s} P_k U(s)\right)_{s\in\mathbb{R}}$ lorsque $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Il n'y a donc pas unicité du groupe associé à un générateur analytique.

On va montrer maintenant que l'extension analytique $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$, du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ vérifie une relation de semi-groupe dans le sens ci-dessous. La proposition suivante généralise en quelque sorte le résultat du lemme 2.8.

Proposition 2.16. *Soit α et β deux complexes quelconques. On considère alors l'opérateur $C_\alpha C_\beta$ de domaine $D(C_\alpha C_\beta) = \{x \in D(C_\beta)\ ;\ C_\beta x \in D(C_\alpha)\}$. On a les résultats suivants*
(i) si $\Re(\alpha)\Re(\beta) \geq 0$, alors $C_\alpha C_\beta = C_{\alpha+\beta}$;
(ii) si $\Re(\alpha)\Re(\beta) < 0$, alors la fermeture de $C_\alpha C_\beta$ est égale à $C_{\alpha+\beta}$.

Démonstration. • Montrons que les deux opérateurs $C_\alpha C_\beta$ et $C_{\alpha+\beta}$ coïncident sur $\mathcal{D}$. Soit $x \in \mathcal{D}$; alors il existe une fonction f_x holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f_x(\beta) = C_\beta x$ et $f_x(\alpha + \beta) = C_{\alpha+\beta}x$. D'après le lemme 2.8, la fonction $z \mapsto f_x(z + \beta)$ est un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ de $is \mapsto U(s)C_\beta x$. De même, $z \mapsto f_{C_\beta x}(z)$ l'est par définition car $C_\beta x \in \mathcal{D}$. Par unicité d'un tel prolongement, on en déduit en particulier que $f_x(\alpha + \beta) = f_{C_\beta x}(\alpha)$, ce qui est le résultat cherché.
• L'ensemble $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel pour les deux opérateurs $C_\alpha C_\beta$ et $C_{\alpha+\beta}$. Dans le cas de $C_{\alpha+\beta}$, il s'agit de la proposition 2.13. Pour l'opérateur $C_\alpha C_\beta$, on considère un élément $x \in D(C_\alpha C_\beta)$, et on note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sa suite régularisante associée à U. Par définition, on a $x_n \in \mathcal{D}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. De plus, par le lemme 2.8, on a, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$C_\alpha C_\beta x_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t) C_\alpha C_\beta x\ dt,$$

car $x \in D(C_\alpha C_\beta)$. Ainsi, on a $\lim_{n\to\infty} C_\alpha C_\beta x_n = C_\alpha C_\beta x$.
(i) Dans le cas où $\Re(\alpha)\Re(\beta) = 0$, c'est le lemme 2.8. Supposons maintenant que $\Re(\alpha)\Re(\beta) > 0$. Montrons que $(C_\alpha C_\beta, D(C_\alpha C_\beta))$ est un opérateur fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(C_\alpha C_\beta)$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ et $(C_\alpha C_\beta x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in X$. Il s'agit donc de montrer que $x \in D(C_\alpha C_\beta)$ et $C_\alpha C_\beta x = y$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\tilde{x}_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t) x_n\ dt.$$

Alors $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite de $\mathcal{D}$ qui converge vers x et $(C_\alpha C_\beta \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers y. On sait, d'après le point précédent, que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $C_\alpha C_\beta \tilde{x}_n = C_{\alpha+\beta}\tilde{x}_n$. On peut alors appliquer le principe du maximum à $h_n - h_m$, $m,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

sur $\Omega_{\alpha+\beta}$ où $h_p(z) := e^{z^2} C_z \tilde{x}_p$, $z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.10, on peut déduire que $(h_n)_{\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ est une suite de Cauchy uniforme en $z \in \overline{\Omega}_{\alpha+\beta}$; elle converge donc uniformément vers une fonction h sur $\overline{\Omega}_{\alpha+\beta}$, régulière sur $\Omega_{\alpha+\beta}$. La fonction $f : z \mapsto e^{-z^2} h(z)$ est donc régulière sur $\Omega_{\alpha+\beta}$ et vérifie $f(is) = U(s)x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(C_\beta \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ est une suite qui converge vers $f(\beta)$. Comme C_β est un opérateur fermé, $x \in D(C_\beta)$ et $C_\beta x = f(\beta)$. On sait aussi que C_α est un opérateur fermé et $(C_\alpha C_\beta \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ est une suite qui converge vers y. Ainsi, $C_\beta x \in D(C_\alpha)$ et $C_\alpha C_\beta x = y$. Donc l'opérateur $(C_\alpha C_\beta, D(C_\alpha C_\beta))$ est fermé.
Pour terminer, $C_\alpha C_\beta$ et $C_{\alpha+\beta}$ sont deux opérateurs fermés qui coïncident sur $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel pour chacun d'eux, $C_\alpha C_\beta = C_{\alpha+\beta}$.
(ii) Supposons que $\Re(\alpha)\Re(\beta) < 0$. Comme tout à l'heure, $\mathcal{D}$ est un domaine essentiel pour $(C_{\alpha+\beta}, D(C_{\alpha+\beta}))$, ainsi que pour $(C_\alpha C_\beta, D(C_\alpha C_\beta))$. Ici, l'opérateur $(C_\alpha C_\beta, D(C_\alpha C_\beta))$ n'est pas nécessairement fermé (il suffit pour le voir de prendre $\beta = -\alpha$, par exemple), alors que $C_{\alpha+\beta}$ est toujours fermé par la proposition 2.10. Ainsi, on a le résultat annoncé, c'est-à-dire que la fermeture de $C_\alpha C_\beta$ est égale à $C_{\alpha+\beta}$. □

Corollaire 2.17. *Soit C le générateur analytique d'un groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continu sur un espace de Banach X. Alors C est borné si et seulement si $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est la trace d'un semi-groupe holomorphe sur X.*

Démonstration. Si $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est la trace d'un semi-groupe holomorphe $(T(z))_{\Re(z)>0}$, alors on a déjà montré que $C = T(1)$, et donc C est borné.
Inversement, on considère maintenant le cas où C est borné. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $D(C^N) = X$. Ainsi, $D(C_z) = X$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \geq 0$. On pose alors $T(z) = C_z$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \geq 0$. D'après la proposition précédente, $(T(z))_{\Re(z)>0}$ est donc un semi-groupe holomorphe dont U est la trace. □

Remarque 2.18. *Grâce à la proposition 2.16, on peut remarquer que les opérateurs C_α, $\alpha \in \mathbb{C}$, sont injectifs et vérifient $(C_\alpha^{-1}, R(C_\alpha)) = (C_{-\alpha}, D(C_{-\alpha}))$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.*
De plus, C^{-1} est le générateur analytique de $(U(-s))_{s\in\mathbb{R}}$.

Dans le cas de l'exemple 2.6, l'inverse de $J_p(1)$ est donné par

$$\begin{cases} D(J_p(1)^{-1}) = \{f \in W^{1,p}(0,1) \ ; \ f(0) = 0\} \\ J_p(1)^{-1} f = f'. \end{cases}$$

L'exemple suivant est particulièrement important. Il nous permet de faire le lien entre la classe des opérateurs BIP et l'ensemble des générateurs analytiques de groupes fortement continus.

Exemple 2.19. *Soit A un opérateur sectoriel admettant des puissances imaginaires bornées. On pose, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $U(s) = A^{is}$. D'après le chapitre 1, on sait que $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu. Le générateur analytique, suivant la définition 2.3 de ce groupe est l'opérateur A.*

En effet, pour un opérateur A sectoriel, on sait que l'application $z \mapsto A^z x$ est régulière sur $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; -1 < \Re(z) < 1\}$, pour tout $x \in D(A) \cap R(A)$. Si on note C le générateur analytique de $(U(s))_{s \in \mathbb{R}}$, on a, pour tout $x \in D(A) \cap R(A)$, $Cx = Ax$. D'après la proposition 2.10, C est un opérateur fermé. Ainsi, $(A, D(A))$ étant la fermeture de l'opérateur $(A, D(A) \cap R(A))$, on a $(A, D(A)) \subset (C, D(C))$, c'est-à-dire $D(A) \subset D(C)$ et pour tout $x \in D(A)$, $Ax = Cx$.
Inversement, soit $\mathcal{D}$ l'ensemble défini dans le lemme 2.9. Alors $\mathcal{D} \cap D(A)$ est un domaine essentiel pour C. En effet, soit $x \in D(C)$; pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $x_n = n(n+A)^{-1} \sqrt{\dfrac{n}{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)x \, dt$. Ainsi, $x_n \in \mathcal{D} \cap D(A)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n \to \infty} Cx_n = Cx$. Comme C coïncide avec A sur $\mathcal{D} \cap D(A)$, on a $(C, D(C)) = \overline{(A, \mathcal{D} \cap D(A))} = (A, D(A))$. $\square$

Chapitre 3

Propriétés spectrales

On se limite ici aux groupes fortement continus sur un espace de Banach, de type strictement inférieur à π. Il s'agit dans ce chapitre de localiser le spectre du générateur analytique ainsi que de donner une estimation de sa résolvante. On développe un calcul fonctionnel qui nous permettra ensuite, dans le chapitre suivant, de donner une démonstration du théorème de Dore-Venni.

3.1 Localisation du spectre

On note ω le type du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continu sur X, espace de Banach. Soit $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ l'extension analytique de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. On suppose que $\omega < \pi$. Pour $\theta \in (0, \pi)$, on note

$$\Sigma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; ; \; |\arg(\lambda)| < \theta\}.$$

Lemme 3.1. *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble défini dans le lemme 2.9 associé au groupe U. Alors $1+C$ est un opérateur injectif, $\mathcal{D} \subset R(1+C)$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, pour tout $\gamma \in (0, 1)$, on a*

$$\begin{aligned}(1 + C)^{-1}x &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z-1}x \, \frac{dz}{\sin \pi z} && (3.1)\\ &= x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z}. && (3.2)\end{aligned}$$

Preuve. On montre tout d'abord la convergence des intégrales considérées. Soit γ fixé dans $(0, 1)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\omega + \varepsilon < \pi$; il existe alors une constante $K_\varepsilon > 0$ vérifiant $\|U(s)\| \le K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)|s|}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. D'autre part, d'après le lemme 2.8, on sait que si $z = \gamma + is$, $\gamma \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{R}$, on a $C_{z-1}x = U(s)C_{\gamma-1}x$. On a de plus l'estimation suivante, valable pour tout $x \in R(C)$,

$$\begin{aligned}\left\| C_{z-1}x \, \frac{1}{\sin \pi z} \right\| &\le K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)|s|} \, \|C_{\gamma-1}x\| \, \frac{1}{|\sin \pi(\gamma + is)|}\\ &\le \kappa e^{(-\pi+\omega+\varepsilon)|s|}, && (3.3)\end{aligned}$$

où κ est une constante qui ne dépend pas de s. Or, d'après le choix de ε, $-\pi+\omega+\varepsilon<0$. D'où la convergence absolue de $\displaystyle\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z-1}x\,\frac{dz}{\sin\pi z}$.
On note maintenant

$$I_\gamma := \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z-1}x\,\frac{dz}{\sin\pi z},$$

pour $x\in\mathcal{D}$ et $\gamma\in(0,1)$. D'après l'estimation (3.3), cette intégrale est absolument convergente. Calculons la quantité $(1+C)I_\gamma x$. Comme C est fermé, on a

$$\begin{aligned}(1+C)I_\gamma x &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z-1}x\,\frac{dz}{\sin\pi z}+\frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z}x\,\frac{dz}{\sin\pi z}\\ &= I_\gamma(1+C)x,\end{aligned}$$

car pour tout $x\in\mathcal{D}$, $CC_{z-1}x=C_zx$ d'après la proposition 2.16. Comme précédemment, ces deux intégrales sont absolument convergentes d'après l'inégalité (3.3). Ainsi,

$$(1+C)I_\gamma x=\frac{1}{2i}\,2i\pi\ \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\mapsto C_zx\,\frac{1}{\sin\pi z}\right),$$

d'après le théorème des résidus. Or $\mathrm{Res}_{z=0}\left(z\mapsto C_zx\,\dfrac{1}{\sin\pi z}\right)=\dfrac{1}{\pi}\,x$. Ainsi, pour tout $x\in\mathcal{D}$,

$$(1+C)I_\gamma x=I_\gamma(1+C)x=x. \tag{3.4}$$

On peut alors montrer que l'opérateur $1+C$ est injectif. En effet, soit $x\in D(C)$ tel que $(1+C)x=0$. Alors $C_zx=e^{i\pi z}x$, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et donc $x\in\mathcal{D}$. D'après l'égalité (3.4), on sait alors que $I_\gamma(1+C)x=x$. Or $(1+C)x=0$, donc $x=0$.
Ainsi, $\mathcal{D}\subset R(1+C)$ et on a, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $(1+C)^{-1}x=I_\gamma x$, ce qui donne l'égalité (3.1).
D'autre part, toujours grâce au théorème des résidus, on peut montrer l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z-1}x\,\frac{dz}{\sin\pi z}+\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_{z}x\,\frac{dz}{\sin\pi z} &= 2i\pi\ \mathrm{Res}_{z=0}\left(z\mapsto C_zx\,\frac{1}{\sin\pi z}\right)\\ &= 2i\pi\,\frac{1}{\pi}\,x=2i\,x.\end{aligned}$$

On a ainsi montré (3.2). □

Remarque 3.2. *Dans le théorème précédent, on peut remarquer que les intégrales considérées ne dépendent pas de $\gamma\in(0,1)$.*

En effet, On a montré que pour tout $\gamma_1,\gamma_2\in(0,1)$, on a $(1+C)I_{\gamma_1}x=x=(1+C)I_{\gamma_2}x$, pour tout $x\in\mathcal{D}$. Comme $1+C$ est injectif, $I_{\gamma_1}=I_{\gamma_2}$. □

Proposition 3.3. *Pour tout $\lambda\in\Sigma_{\pi-\omega}$, on a $D(C)\subset R(\lambda+C)$ et $R(C)\subset R(\lambda+C)$. De plus, on a les formules suivantes, pour γ arbitraire dans $(0,1)$:*

pour tout $x \in D(C)$,

$$(\lambda + C)^{-1}x = \frac{1}{\lambda}\ x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-z-1} C_z x\ \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{3.5}$$

et pour tout $x \in R(C)$,

$$(\lambda + C)^{-1}x = \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-z} C_{z-1} x\ \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit λ fixé dans $\Sigma_{\pi-\omega}$. Soit $\vartheta \in (\omega, \pi)$ tel que $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$. On peut se contenter de montrer la proposition pour $\lambda = 1$. En effet, il suffit d'utiliser la remarque 2.7 ; on remplace le groupe U par le groupe U_λ, $U_\lambda(s) = \lambda^{-is}U(s)$, $s \in \mathbb{R}$, de type au plus égal à $\pi - \vartheta + \omega < \pi$, dont le générateur analytique est $\dfrac{C}{\lambda}$.
Pour tout $x \in R(C)$, on note

$$Ix := \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} C_{z-1} x\ \frac{dz}{\sin \pi z},$$

pour un $\gamma \in (0, 1)$. Cette intégrale est absolument convergente compte tenu de l'estimation (3.3). Soit $x \in R(C)$ fixé. On note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de x associée au groupe U. D'après l'égalité (3.1) établie dans le lemme 3.1, on a, pour tout $n \in \setminus\{0\}$, $(1 + C)Ix_n = I(1 + C)x_n = x_n$. Or la suite $(Ix_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers Ix lorsque $n \to \infty$. En effet, comme $x \in R(C)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
Ix_n &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} C_{z-1} x_n\ \frac{dz}{\sin \pi z} \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} C_{z-1}\left(\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)x\ dt\right)\ \frac{dz}{\sin \pi z} \\
&= \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U(t)\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} C_{z-1} x\ \frac{dz}{\sin \pi z}\right)\ dt,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini (les intégrales considérées sont absolument convergentes), ce qui donne le résultat, lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$.
Comme l'opérateur $1 + C$ est fermé, on a, pour tout $x \in R(C)$, $Ix \in D(C)$ et $(1 + C)Ix = I(1 + C)x = x$, ce qui donne l'égalité (3.6).
Pour montrer l'égalité (3.5), on procède de la même manière. Pour tout $x \in D(C)$, on pose

$$Jx := x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} C_z x\ \frac{dz}{\sin \pi z}$$

pour un $\gamma \in (0, 1)$. Grâce à l'estimation (3.3), on voit que cette intégrale est absolument convergente. Soit alors $x \in D(C)$ fixé. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ régularisante de x associée à U. On montre alors, en utilisant le théorème de Fubini comme plus haut, que la suite $(Jx_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers Jx lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $(1+C)Jx_n = J(1+C)x_n = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et comme $1+C$

est un opérateur fermé, on obtient l'égalité (3.5) comme on avait obtenu l'égalité (3.6). □

Cette proposition permet de localiser le spectre du générateur analytique C. C'est l'objet de la proposition suivante.

Notations. On note $\sigma_p(C)$ le **spectre ponctuel** de C, *i.e.*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \exists \ x \neq 0, \ x \in D(C) \ : \ Cx = \lambda x\}.$$

L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \overline{(\lambda - C)D(C)} \subsetneq X\}$ est appelé **spectre résiduel** de C et est noté $\sigma_{rés}(C)$.
Et finalement, on note $\sigma_{app}(C)$ le **spectre approché** de C, *i.e.*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \exists \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(C)^{\mathbb{N}} \ : \ \|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} (\lambda - C)x_n = 0\}.$$

Remarque 3.4. *Il y a inclusion du spectre ponctuel $\sigma_p(C)$ dans le spectre approché $\sigma_{app}(C)$.*
Le spectre de C, $\sigma(C)$, est la réunion des spectres approché et résiduel de C.

Proposition 3.5. *On a les inclusions suivantes*
(i) $\sigma_p(C) \subset \overline{\Sigma}_\omega$,
(ii) $\sigma_{rés}(C) \subset \overline{\Sigma}_\omega$ et
(iii) si $\rho(C) \neq \emptyset$, alors $\sigma(C) \subset \overline{\Sigma}_\omega$,

Démonstration. Soit $\vartheta \in (\omega, \pi)$.
On a montré dans le lemme 3.1 et dans la proposition 3.3 que pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$, $\lambda + C$ est injectif et $\mathcal{D} \subset R(\lambda + C)$. Ainsi, $-\lambda \notin \sigma_p(C)$ et $-\lambda \notin \sigma_{rés}(C)$. D'où, $\sigma_p(C) \subset \Sigma_\vartheta$ et $\sigma_{rés}(C) \subset \Sigma_\vartheta$. Or ceci est vrai pour tout $\vartheta \in (\omega, \pi)$. D'où les inclusions *(i)* et *(ii)*.
On suppose maintenant que $\rho(C) \neq \emptyset$. On note $-\mu$ un élément de $\rho(C)$. L'identité des résolvantes nous permet d'écrire, pour tout $x \in \mathcal{D}$ et pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$, $(\lambda + C)^{-1}x = (\mu + C)^{-1}x + (\mu - \lambda)(\lambda + C)^{-1}(\mu + C)^{-1}x$. Or, d'après l'égalité (3.5), l'opérateur $(\lambda + C)^{-1}(\mu + C)^{-1}$ est un opérateur borné sur X. Ainsi, comme $\mathcal{D}$ est dense dans X, l'opérateur $(\lambda + C)^{-1}$ est borné sur X, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$, pour tout $\vartheta \in (\omega, \pi)$. On a donc l'inclusion *(iii)*. □

3.2 Résolvante du générateur analytique

Le problème est maintenant de déterminer pour quels groupes $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continus sur X, de type inférieur strictement à π, l'ensemble résolvant du générateur analytique est non vide. La proposition suivante relie ce fait à la convergence d'une intégrale singulière.

Proposition 3.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes ;*
(i) $\rho(C) \neq \emptyset$,
(ii) $D(C) + R(C) = X$,

(iii) $\left(\displaystyle\int_{\varepsilon\le|s|\le 1}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ *admet une limite forte lorsque* $\varepsilon\to 0^+$ *dans* X *pour tout* $x\in X$*,*

(iv) $\left(\displaystyle\int_{\varepsilon\le|s|\le 1}U(s)x\,\frac{ds}{\sinh\pi s}\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ *admet une limite forte lorsque* $\varepsilon\to 0^+$ *dans* X *pour tout* $x\in X$*, notée* Λx*.*

Remarque 3.7. *Lorsque (iv) est vérifiée,* Λ *est un opérateur (linéaire) borné sur l'espace* X*, par le théorème de Banach-Steinhaus.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ *(ii).* Supposons que $\rho(C)\neq\emptyset$. Soit $-\mu\in\rho(C)$. Pour tout $x\in X$, on a $x=\mu(\mu+C)^{-1}x+C(\mu+C)^{-1}x$; si on note $x_1:=\mu(\mu+C)^{-1}x$ et $x_2:=C(\mu+C)^{-1}x$, on a la décomposition $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in D(C)$ et $x_2\in R(C)$. D'où *(ii).*
(ii) $\Rightarrow$ *(iii).* Il suffit de montrer *(iii)* pour $x\in D(C)$, puis pour $x\in R(C)$, et ensuite appliquer *(ii).*
Soit $x\in D(C)$. On note Γ^+ le chemin

$$(s=-1,\ t\in[0,\tfrac12])\cup(t=\tfrac12,\ s\in[-1,1])\cup(s=1,\ t\in[\tfrac12,0])$$

et

$$C_\varepsilon^+:=\left\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=\varepsilon \text{ et } \arg(z)\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\right\},$$

où on note le plan complexe $\mathbb{C}=\{t+is,\ t,s\in\mathbb{R}\}$. Le théorème de Cauchy permet de montrer que, pour tout $\varepsilon\in(0,\frac12)$, on a

$$-\int_{\varepsilon\le|s|\le 1}\frac{U(s)x}{s}\,ds+\int_{-C_\varepsilon^+\cup\Gamma^+}\frac{C_zx}{z}\,dz=0.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon\le|s|\le1}\frac{U(s)x}{s}\,ds$ existe et vaut $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-C_\varepsilon^+\cup\Gamma^+}\frac{C_zx}{z}\,dz$. Comme

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{C_\varepsilon^+}\frac{C_zx}{z}\,dz=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{C_{\varepsilon e^{i\theta}}x}{\varepsilon e^{i\theta}}\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=i\pi x,$$

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon\le|s|\le1}\frac{U(s)x}{s}\,ds$ existe et vaut $\displaystyle\int_{\Gamma^+}\frac{C_zx}{z}\,dz-i\pi x.$

Pour $x\in R(C)$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $(U(-s))_{s\in\mathbb{R}}$ et on obtient alors *(iii).*
(iii) $\iff$ *(iv).* Remarquons que l'intégrale $\displaystyle\int_{|s|\le1}U(s)x\left(\frac{1}{\sinh\pi s}-\frac{1}{\pi s}\right)ds$ est absolument convergente pour tout $x\in X$. En effet, $|\frac{1}{\sinh\pi s}-\frac{1}{\pi s}|\le\frac{\pi|s|}{6}+\mathcal{O}(|s|)$ pour s dans un voisinage de 0, et $\sup\limits_{|s|\le1}\|U(s)\|<\infty$. Ainsi, la convergence des intégrales $\left(\displaystyle\int_{\varepsilon\le|s|\le1}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ lorsque $\varepsilon\to0^+$ dans X pour tout $x\in X$ est équivalente à

la convergence de $\left(\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} U(s)x\,\frac{ds}{\sinh\pi s}\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ lorsque $\varepsilon\to 0^+$ dans X pour tout $x\in X$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)*. Supposons que $\Lambda : X \longrightarrow X$ définit un opérateur borné. Pour tout $x\in D(C)$, on a alors, pour tout $\varepsilon\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}(1+C)^{-1}x &= x-\frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_z x\,\frac{dz}{\sin\pi z}, \quad \text{d'après (3.5)},\\ &= x-\frac{1}{2i}\int_{|s|\geq\varepsilon}\frac{U(s)x}{\sinh\pi s}\,ds-\frac{1}{2i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} C_{\varepsilon e^{i\theta}}x\,\frac{i\varepsilon e^{i\theta}d\theta}{\sin\pi\varepsilon e^{i\theta}}, \quad \text{d'après Cauchy},\\ &= \frac{1}{2}\,x-\frac{1}{2i}\int_{|s|\geq 1}\frac{U(s)x}{\sinh\pi s}\,ds-\frac{1}{2i\pi}\,\Lambda x, \quad \text{en faisant } \varepsilon\to 0^+.\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{|s|\geq 1}\frac{U(s)x}{\sinh\pi s}\,ds$ est absolument convergente pour tout $x\in X$. En effet, $|\frac{1}{\sinh\pi s}|\leq 4e^{-\pi|s|}$ pour tout $s\in\mathbb{R}$, $|s|\geq 1$ et le type de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est strictement inférieur à π par hypothèse.

Comme Λ est un opérateur borné et comme $D(C)$ est dense dans X, l'opérateur $(1+C)^{-1}$ est borné sur X, c'est-à-dire que $-1\in\rho(C)$. D'où *(i)*. □

Exemple 3.8. *On donne ici un cas où (iii) n'est pas vérifié. On considère à cet effet le groupe des translations sur* $L^2(\mathbb{R};L^\infty(\mathbb{R}))$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$ par $f(t):=\chi_{[1,2]}(t)\chi_{[0,t]}$; cette fonction f appartient à $L^2(\mathbb{R};L^\infty(\mathbb{R}))$ et vérifie

$$\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{f(t-s)}{s}\,ds=\max\{\ln\varepsilon,\ln|t-.|\}\chi_{[t-1,t+1]}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{f(.-s)}{s}\,ds$ ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R};L^\infty(\mathbb{R}))$ lorsque $\varepsilon\to 0^+$.

Ceci montre aussi que l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas un espace de Banach UMD. □

Exemple 3.9. *On considère maintenant le cas du groupe des translations* $(\tau_1(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *sur* $L^1(\mathbb{R})$. *On peut alors montrer que la condition (i) de la proposition 3.6 n'est pas vérifiée.*

On utilise la théorie des multiplicateurs de Fourier. Soit $p\in[1,\infty]$. Pour tout $f\in L^p(\mathbb{R})$, on note $(\tau_p(s)f)(t)=f(t-s)$, $t,s\in\mathbb{R}$. Pour $f\in L^p(\mathbb{R})$, on note $\hat f$ la transformée de Fourier de f, *i.e.* $\hat f(\xi):=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}f(t)\,dt$, $\xi\in\mathbb{R}$, si $f\in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $f\in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $s\in\mathbb{R}$, on a $(\tau_1(s)f)\hat{}(\xi)=e^{-is\xi}\hat f(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$. Alors, pour tout $p\in(1,\infty)$, l'application $\xi\mapsto\dfrac{1}{1+e^{-\xi}}$ est un multiplicateur sur $L^p(\mathbb{R})$ et on a $((1+C_p)^{-1}f)\hat{}(\xi)=\dfrac{1}{1+e^{-\xi}}\hat f(\xi)$, où C_p désigne le générateur analytique du groupe $(\tau_p(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Mais $\xi\mapsto\dfrac{1}{1+e^{-\xi}}$ n'est pas un multiplicateur sur $L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, $-1\notin\rho(C_1)$, et donc, par la proposition 3.5, $\rho(C_1)=\emptyset$. □

Dans le cas où l'une des trois conditions *(i)*, *(ii)* ou *(iii)* est vérifiée, il est possible de donner une estimation de la résolvante de C. Cela nous donne une indication quant à la classe d'opérateurs linéaires qui sont générateurs analytiques d'un groupe.

Proposition 3.10. *Si l'une des trois conditions de la proposition 3.6 est vérifiée, alors la résolvante de C vérifie l'estimation suivante. Pour tout $\vartheta \in (\omega, \pi)$, il existe une constante $c_\vartheta > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$, on a*

$$\|\lambda(\lambda + C)^{-1}\| \leq c_\vartheta \left(1 + |\ln(|\lambda|)| + (\ln|\lambda|)^2\right). \tag{3.7}$$

Remarque 3.11. *On peut remarquer que l'estimation (3.7) est proche de l'estimation que vérifient les opérateurs sectoriels définis dans le chapitre 1.*

Démonstration. On suppose que $\rho(C) \neq \emptyset$. D'après la proposition 3.5, on sait que $\sigma(C) \subset \overline{\Sigma_\omega}$. En particulier, $-1 \in \rho(C)$. D'autre part, d'après l'égalité (3.5), on a les égalités suivantes, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\omega}$, et pour tout $x \in D(C)$,

$$\lambda(\lambda + C)^{-1}x = x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-z} C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z},$$

et

$$(1 + C)^{-1}x = x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z},$$

où γ est arbitraire dans $(0, 1)$. Ainsi, on a

$$\lambda(\lambda + C)^{-1}x = (1 + C)^{-1}x - \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\lambda^{-z} - 1}{\sin \pi z} C_z x \, dz.$$

Or, pour $x \in D(C)$, l'application $z \mapsto \dfrac{\lambda^{-z} - 1}{\sin \pi z} C_z x$ est holomorphe dans la bande Ω, continue sur $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; \Re(z) \in [0, 1)\}$. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy dans la bande $\{z \in \mathbb{C} \; ; \; \Re(z) \in [0, \gamma]\}$ et on obtient le résultat suivant

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\lambda^{-z} - 1}{\sin \pi z} C_z x \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{-is} - 1}{\sinh \pi s} U(s)x \, ds.$$

Soit $\vartheta \in (\omega, \pi)$ fixé. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{-is} - 1}{\sinh \pi s} U(s)x \, ds$ est absolument convergente pour tout $x \in X$, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$. En effet,

- pour $|s| \geq 1$, $\left\|\dfrac{\lambda^{-is} - 1}{\sinh \pi s} U(s)x\right\| \leq 4e^{-\pi|s|}(e^{|s||\arg\lambda|} + 1)\|U(s)\|\|x\|$. Comme dans la preuve du lemme 3.1, on choisit $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que $\omega + \varepsilon < \vartheta$ et il existe une constante $K_\varepsilon > 0$ vérifiant $\|U(s)\| \leq K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)|s|}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\left\|\frac{\lambda^{-is} - 1}{\sinh \pi s} U(s)x\right\| \leq 4K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon-\pi)|s|}(e^{\vartheta|s|} + 1)\|x\|.$$

En particulier, compte tenu du choix de ε, l'intégrale $\displaystyle\int_{|s|\geq 1} \frac{\lambda^{-is}-1}{\sinh \pi s} U(s)x\, ds$ est absolument convergente, pour tout $x \in X$.
• Pour $|s| \leq 1$, on remarque que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x & : & [-1,1] & \longrightarrow & X \\ & & s & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\lambda^{-is}-1}{\sinh \pi s}\; U(s)x \text{ si } s \neq 0, \\ \\ -\dfrac{i}{\pi} \ln|\lambda| x \text{ si } s = 0 \end{cases} \end{array}$$

est continue et vérifie l'estimation suivante, pour tout $s \in [-1,1] \setminus \{0\}$,

$$\|\varphi_x(s)\| \leq K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)} \left| \frac{\lambda^{-is}-1}{\sinh \pi s} \right| \|x\|.$$

Or, pour tout $|s| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda^{-is}-1}{\sinh \pi s} \right| &= \left| \frac{e^{s \arg \lambda} e^{-is \ln|\lambda|} - 1}{\sinh \pi s} \right| \\ &\leq \left| \frac{e^{s \arg \lambda} - 1}{\sinh \pi s} \right| + e^{s \arg \lambda} \left| \frac{\cos(s \ln|\lambda|) - 1}{\sinh \pi s} - i \,\frac{\sin(s \ln|\lambda|)}{\sinh \pi s} \right| \\ &\leq \frac{\pi - \vartheta}{\pi} e^{\pi - \vartheta} + e^{\pi-\vartheta} \left(1 + \frac{(s \ln|\lambda|)^2}{2\pi|s|} + \frac{|s \ln|\lambda||}{\pi|s|} \right) \\ &\leq e^{\pi-\vartheta} \left(1 + \frac{1}{2\pi} (\ln|\lambda|)^2 + \frac{1}{\pi} |\ln|\lambda|| \right), \quad \text{car } |s| \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{s \leq 1} \varphi_x(s)\, ds$ est absolument convergente pour tout $x \in X$.
D'autre part, compte tenu des estimations précédentes, on a l'estimation voulue pour la résolvante du générateur analytique, c'est-à-dire, pour tout $\vartheta \in (\omega, \pi)$, il existe une constante $c_\vartheta > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$, on a
$\|\lambda(\lambda + C)^{-1}\| \leq c_\vartheta (1 + |\ln|\lambda|| + (\ln|\lambda|)^2)$. □

3.3 Calcul fonctionnel

Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur X, espace de Banach. On suppose que le type de U est strictement inférieur à π. On suppose de plus que l'opérateur Λ défini dans la proposition 3.6 est borné. On donne alors une expression intégrale de l'extension analytique $(C_\alpha)_{\Re(\alpha)\in(0,1)}$ du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Cette expression est donnée en fonction de la résolvante de C.

Lemme 3.12. *Pour $x \in D(C)$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx\, dt$ est absolument convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) \in (0,1)$.*

Preuve. D'après l'égalité (3.6), on a pour tout $x \in D(C)$ et pour tout $t > 0$ l'égalité suivante

$$(t+C)^{-1}Cx = \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-z}C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z}, \tag{3.8}$$

où γ est arbitraire dans $(0,1)$, car $C_{z-1}Cx = C_z x$.
On considère alors $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(\alpha) < 1$. D'après l'égalité (3.8), on a

$$t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx = \frac{1}{2}\, t^{-\gamma+\alpha-1}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-is}U(s)C_\gamma x \, \frac{ds}{\sin \pi(\gamma+is)}.$$

D'où l'estimation

$$\|t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx\| \leq \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} K_\varepsilon e^{(\omega+\varepsilon)|s|} \, \frac{1}{|\sin \pi(\gamma+is)|} \, ds \quad \|C_\gamma x\|\right) t^{-\gamma+\Re(\alpha)-1}$$

où ε et K_ε sont choisis comme dans la preuve du lemme 3.1.
Si on choisit $\gamma \in (0, \Re(\alpha))$, on a $-\gamma+\Re(\alpha)-1 > -1$, et donc $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx \, dt$ est une intégrale absolument convergente.
D'autre part, si on choisit $\gamma \in (\Re(\alpha), 1)$, on a $-\gamma+\Re(\alpha)-1 < -1$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx \, dt$ est absolument convergente.
Finalement, on a montré la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx \, dt$ pour tout $x \in D(C)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(\alpha) < 1$. $\square$

Il est maintenant possible de donner une expression intégrale de $C_\alpha x$ pour $x \in D(C)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(\alpha) < 1$.

Proposition 3.13. *Pour $x \in D(C)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < \Re(\alpha) < 1$, on a l'égalité suivante*

$$C_\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx \, dt. \tag{3.9}$$

Démonstration. Soit $x \in D(C)$ fixé. On choisit $\gamma_1 \in (0, \Re(\alpha))$ et $\gamma_2 \in (\Re(\alpha), 1)$. D'après la formule (3.8), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx \, dt &= \int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} t^{-z}C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z}\right) dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\left(\int_0^1 t^{\alpha-1-z} \, dt\right) C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z}, \quad \text{par Fubini,} \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty} \frac{-1}{z-\alpha} \, C_z x \, \frac{dz}{\sin \pi z}.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx\ dt &= \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty} t^{-z}C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z}\right)\ dt \\ &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\left(\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1-z}\ dt\right)C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z}, \quad \text{par Fubini,} \\ &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\frac{1}{z-\alpha}\ C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z}.\end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant ces deux intégrales, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx\ dt &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\frac{-1}{z-\alpha}\ C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z} \\ &\quad +\frac{1}{2i}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\frac{1}{z-\alpha}\ C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z} \\ &= \frac{1}{2i}\ 2i\pi\ \mathrm{Res}_{z=\alpha}\left(z\mapsto\frac{1}{z-\alpha}\ C_z x\ \frac{dz}{\sin\pi z}\right), \quad \text{par le théorème des résidus,} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}C_\alpha x.\end{aligned}$$

D'où l'égalité (3.9). □

Dans la remarque 2.15, on a insisté sur le fait qu'un générateur analytique d'un groupe était générateur analytique d'une infinité de groupes. Nous allons montrer ici que, sous la restriction que le type du groupe reste strictement inférieur à π, un générateur analytique est associé à un unique groupe fortement continu.

Proposition 3.14. *Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur X, de type $\omega<\pi$, de générateur analytique C. Alors $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est l'unique groupe fortement continu de type strictement inférieur à π associé à C, c'est-à-dire que si $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu sur X de type $\omega'<\pi$ de générateur analytique C, alors $U(s)=V(s)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$.*

Démonstration. On note $f_.$ l'extension analytique du groupe U et $g_.$ l'extension analytique du groupe V. Soit $x\in D(C)$. D'après la proposition précédente, pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, $0<\Re(\alpha)<1$, on a

$$f_x(\alpha)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+C)^{-1}Cx\ dt=g_x(\alpha).$$

Comme f_x et g_x sont continues sur $\overline{\Omega}:=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ 0\leq\Re(z)\leq 1\}$, on a, pour tout $s\in\mathbb{R}$,

$$U(s)x=\lim_{\substack{\alpha\to is\\ \Re(\alpha)>0}} f_x(\alpha)=\lim_{\substack{\alpha\to is\\ \Re(\alpha)>0}} g_x(\alpha)=V(s)x,$$

ceci, pour tout $x\in D(C)$. Comme $D(C)$ est dense dans X, on a l'égalité cherchée, soit donc $U(s)=V(s)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. □

Pour terminer ce chapitre, on donne une relation d'égalité entre les spectres ponctuels d'un groupe fortement continu et de son générateur analytique.

Proposition 3.15. *Soit* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe fortement continu de type strictement inférieur à* π*, soit* C *son générateur analytique. On suppose que* $\rho(C) \neq \emptyset$*. Alors le spectre ponctuel* $\sigma_p(U(s))$ *de* $U(s)$ *est égal à* $(\sigma_p(C))^{is}$*, pour tout* $s \in \mathbb{R}$*.*

Démonstration. On note G le générateur infinitésimal de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. La relation $\sigma_p(U(s)) = e^{s\sigma_p(G)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ est connue. Il s'agit donc de montrer que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $(\sigma_p(C))^{is} = e^{s\sigma_p(G)}$.
• Soit $\lambda \in \sigma_p(G)$, soit $s \in \mathbb{R}$. Il existe alors $x \in X \setminus \{0\}$ tel que $U(s)x = e^{\lambda s}x$. Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $is \mapsto e^{\lambda s}x$ définie sur $i\mathbb{R}$ se prolonge de façon holomorphe sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto e^{-i\lambda z}x$, c'est-à-dire en particulier que $x \in D(C)$ et $Cx = e^{-i\lambda}x$, $x \neq 0$. Ainsi, $e^{-i\lambda} \in \sigma_p(C)$.
• Inversement, soit $\lambda \in \sigma_p(C)$. Comme $\rho(C) \neq \emptyset$, on sait d'après la proposition 3.5 que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$. Soit $x \in D(C) \setminus \{0\}$ tel que $Cx = \lambda x$. D'après l'unicité démontrée dans la proposition précédente, on a que $U(s)x = \lambda^{is}x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
□

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous montrons comment la théorie développée plus haut permet de montrer le théorème de Dore-Venni. Nous montrons aussi comment définir des espaces de Hardy associé à un groupe fortement continu borné sur un espace de Banach X.

4.1 Théorème de Dore-Venni

On ne s'intéresse, dans cette section, qu'à des espaces de Banach X possédant la propriété UMD.

4.1.1 Le théorème

Nous donnons ici une démonstration du théorème de Dore-Venni qui apparaît comme un corollaire de la théorie des générateurs analytiques sur les espaces UMD.

Lemme 4.1. *Soit X un espace de Banach UMD. Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu sur X, de type ω. On note $M := \sup\limits_{|s|\leq 2} \|U(s)\|$. Alors pour tout $x \in X$, $\left(\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{U(s)x}{s}\, ds\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ admet une limite forte lorsque $\varepsilon \to 0^+$, et on a, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$\left\| \int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{U(s)x}{s}\, ds \right\| \leq c(\mathcal{H}_2, M)\|x\| \tag{4.1}$$

où $c(\mathcal{H}_2, M)$ est une constante qui ne dépend que de $\mathcal{H}_2$, la constante définie dans la définition 1.5, et de M.

Preuve. Une variante de ce lemme est proposée dans la partie qui suit (voir Lemma 1 de l'article). Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{U(s)x}{s}\, ds &= \int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} U(t)\left(\frac{1}{s}\, U(s-t)x\right)\, ds \\
&= U(t)\int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{\varphi_x(t-s)}{s}\, ds - \int_1^{1+t} \frac{U(s)x}{s}\, ds + \int_{-1}^{-1+t} \frac{U(s)x}{s}\, ds,
\end{aligned}$$

où $\varphi_x(\tau) = \chi_{(-1,1)}(\tau)U(-\tau)x$. Ainsi, si on intègre en t sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on obtient, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{U(s)x}{s}\,ds &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U(t)\left(\int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{\varphi_x(t-s)}{s}\,ds\right)\,dt \\ &\quad -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^{1+t}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{-1+t}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)\,dt.\end{aligned}$$

Comme $\varphi_x \in L^2(\mathbb{R};X)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|s|\geq\varepsilon}\frac{\varphi_x(.-s)}{s}\,ds\right)$ existe dans $L^2(\mathbb{R};X)$ et vaut $H\varphi_x$ où H désigne la transformation de Hilbert. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U(t)H\varphi_x(t)dt \\ &\quad -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^{1+t}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{-1+t}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right)\,dt.\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, et pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right\| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\|U(t)\|\left\|\int_{|s|\geq\varepsilon}\frac{\varphi_x(t-s)}{s}\,ds\right\|\,dt \\ &\quad +\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\|U(s)x\|}{|s|}\,ds\right)\,dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\frac{\|U(s)x\|}{|s|}\,ds\right)\,dt \\ &\leq M\mathcal{H}_2\|\varphi_x\|_{L^2(\mathbb{R};X)} + 2M\|x\|\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{|s|}\,ds \\ &\leq c(\mathcal{H}_2, M)\|x\|.\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses et les notations du lemme précédent, pour tout* $x \in X$, $\left(\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} U(s)\,\frac{ds}{\sinh\pi s}\right)_{\varepsilon\in(0,1)}$ *admet une limite forte lorsque* $\varepsilon \to 0^+$, *notée* Λ_U, *et on a l'estimation suivante, pour tout* $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\left\|\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} U(s)\,\frac{ds}{\sinh\pi s}\right\| \leq c(\mathcal{H}_2, M).$$

Preuve. Il suffit de s'inspirer de la démonstration de *(iii)* ⇒ *(iv)* de la proposition 3.6. Ce corollaire est alors immédiat, compte tenu du lemme 4.1. □

Proposition 4.3. *Soit* X *un espace de Banach UMD. Soit* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe fortement continu sur* X, *de type strictement inférieur à* π. *On note* C *le générateur analytique de* U. *Alors* $\rho(C) \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après la proposition 3.6, $\rho(C) \neq \emptyset$ est équivalent à l'existence de $\Lambda_U x := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 1} U(s)x \, \frac{ds}{\sinh \pi s}$ pour tout $x \in X$ et donc $\Lambda \in \mathcal{B}(X)$. Or le corollaire précédent donne exactement l'existence de cet opérateur borné Λ_U. $\square$

On peut remarquer que tout générateur analytique d'un groupe fortement continu de type inférieur strictement à π sur un espace de Banach UMD est sectoriel. C'est l'objet du corollaire suivant.

Corollaire 4.4. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, C est sectoriel et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $U(s) = C^{is}$. De plus, l'angle spectral φ_C de C est inférieur ou égal à ω_C, le type de U.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on sait que $\rho(C) \neq \emptyset$. Ainsi, d'après la proposition 3.5, on sait que le spectre de C est inclus dans un secteur $\overline{\Sigma}_{\omega_C}$ où ω_C est le type de U, strictement inférieur à π par hypothèse.
D'autre part, soit $\vartheta \in (\omega_C, \pi)$. Pour tout $x \in D(C)$, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\vartheta}$ on a, d'après l'égalité (3.5), en s'inspirant de la démonstration *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)* de la proposition 3.6, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\lambda(\lambda + C)^{-1}x = x - \frac{1}{2i} \int_{|s| \geq 1} \lambda^{-is} U(s)x \, \frac{ds}{\sinh \pi s}$$

$$-\frac{1}{2i} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 1} \lambda^{-is} U(s)x \, \frac{ds}{\sinh \pi s} - \frac{1}{2i\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda^{-\varepsilon e^{i\theta}} f_x(\varepsilon e^{i\theta})}{\sin \varepsilon e^{i\theta}} \, i\varepsilon e^{i\theta} \, d\theta.$$

Lorsqu'on fait tendre ε vers 0^+, on obtient, grâce au lemme 4.1, pour tout $x \in D(C)$,

$$\lambda(\lambda + C)^{-1}x = x - \frac{1}{2i} \int_{|s| \geq 1} \lambda^{-is} U(s)x \, \frac{ds}{\sinh \pi s} - \frac{1}{2i} \, \Lambda_{U_\lambda} x - \frac{1}{2} \, x,$$

où Λ_{U_λ} est l'opérateur défini dans le corollaire 4.2, et correspond au groupe $(U_\lambda(s))_{s \in \mathbb{R}}$ ($U_\lambda(s) = \lambda^{-is} U(s)$, $s \in \mathbb{R}$), de type inférieur ou égal à $\omega + \pi - \vartheta < \pi$. Comme $D(C)$ est dense dans X et comme l'intégrale $\int_{|s| \geq 1} \lambda^{-is} U(s)x \, \frac{ds}{\sinh \pi s}$ est absolument convergente pour tout $x \in X$, l'opérateur $(\lambda + C)^{-1}$ est borné sur X. De plus, on a l'estimation suivante, grâce à (4.2).

$$\begin{aligned} \|\lambda(\lambda + C)^{-1}\| &\leq \frac{1}{2} + \|\Lambda_{U_\lambda}\| + \frac{1}{2} \left\| \int_{|s| \geq 1} \lambda^{-is} U(s) \, \frac{ds}{\sinh \pi s} \right\| \\ &\leq M_\vartheta, \quad \text{constante indépendante de } \lambda \in \Sigma_{\vartheta - \pi}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur C est sectoriel et son angle spectral φ_C vérifie $\varphi_C \leq \vartheta$, pour tout $\vartheta \in (\omega_C, \pi)$, c'est-à-dire $\varphi_C \leq \omega_C$. $\square$

Théorème 4.5. *On considère deux groupes $(U(s))_{s \in \mathbb{R}}$ et $(V(s))_{s \in \mathbb{R}}$ fortement continus sur X, espace de Banach UMD. On suppose que ces deux groupes commutent*

dans le sens où $U(s)V(t) = V(t)U(s)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$. Soit A le générateur analytique de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ et B celui de $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$. On suppose que $0 \in \rho(B)$.
Alors le générateur analytique de $(W(s))_{s\in\mathbb{R}}$, où $W(s) = U(s)V(-s)$, $s \in \mathbb{R}$, est l'opérateur AB^{-1}.

Remarque 4.6. *On montre aussi, dans ce qui suit, que $D(A)$ est un domaine essentiel pour AB^{-1} et, pour tout $x \in D(A)$, on a $B^{-1}x \in D(A)$ et $AB^{-1}x = B^{-1}Ax$.*

Démonstration. Comme B est inversible, le groupe $(V(-t))_{t\in\mathbb{R}}$ est la trace d'un semi-groupe holomorphe $(T(z))_{\Re(z)>0}$, et on a $B^{-1} = T(1)$ (voir remarque 2.18 et corollaire 2.17).
Comme U et V commutent, le générateur infinitésimal de V et le groupe U commutent aussi. Ainsi, le groupe U et le semi-groupe holomorphe T commutent. D'après le lemme 2.14, on a donc, pour tout $x \in D(A)$, $T(z)x \in D(A)$, $\Re(z) > 0$, et $AT(z)x = T(z)Ax$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$.
On note C le générateur analytique du groupe $(W(s))_{s\in\mathbb{R}}$, et $(A_z)_{z\in\mathbb{C}}$ l'extension analytique de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Alors on a $D(A) \subset D(C)$ et $Cx = AT(1)x = T(1)Ax$. En effet, soit $x \in D(A)$. Alors l'application $z \mapsto T(z)A_zx$ est régulière sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(z) \in (0,1)\}$ et vérifie $T(1)A_1x = T(1)Ax = AT(1)x$ et $T(is)A_{is}x = V(-s)U(s)x$.
On peut aussi remarquer que $D(A)$ est un domaine essentiel pour C. En effet, soit $x \in D(C)$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de x associée à U. Alors $x_n \in D(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et d'après le lemme 2.14, comme C est fermé, on a $\lim_{n\to\infty} Cx_n = Cx$.
Le domaine de A est aussi un domaine essentiel pour AB^{-1}. En effet, soit $x \in D(AB^{-1}) := \{x \in X\ ;\ T(1)x \in D(A)\}$. On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de x associée à U et $((T(1)x)_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ la suite régularisante de $T(1)x$ associée à U. Alors $x_n \in D(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on a $T(1)x_n = (T(1)x)_n \in D(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ainsi, on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ par définition de la suite régularisante, et $\lim_{n\to\infty} AT(1)x_n = \lim_{n\to\infty} A(T(1)x)_n = AT(1)x$, d'après la proposition 2.13.
Il est clair, d'autre part, que $(AB^{-1}, D(AB^{-1}))$ est un opérateur fermé. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(AB^{-1})$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ et $\lim_{n\to\infty} AB^{-1}x_n = y \in X$. Alors, comme $B^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, on a $\lim_{n\to\infty} B^{-1}x_n = B^{-1}x$. Comme A est fermé, on sait donc que $B^{-1}x \in D(A)$ et $y = AB^{-1}x$.
L'opérateur C est fermé d'après la proposition 2.10. Comme $D(A)$ est un domaine essentiel pour C et pour AB^{-1}, on a l'égalité cherchée, c'est-à-dire $C = AB^{-1}$. □

Corollaire 4.7. *On considère les générateurs analytiques A et B de deux groupes $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ et $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur un espace de Banach X qui possède la propriété UMD. On suppose que U, de type ω_1 et V, de type ω_2 commutent dans le sens du théorème 4.4, et vérifient $\omega_1 + \omega_2 < \pi$. On suppose de plus que B est inversible.*
Alors $(A + B, D(A) \cap D(B))$ est un opérateur fermé et inversible sur X.

Remarque 4.8. *Ce corollaire a été montré par G. Dore et A. Venni ([DV87]) dans le cas où A est aussi inversible. J. Prüss et H. Sohr l'ont démontré dans la forme* *présentée ici. Ils ont montré, plus généralement, que, sans hypothèse d'inversibilité des opérateurs A et B, on a*

$$\|Ax\| + \|Bx\| \leq c\|Ax + Bx\|, \quad \textit{pour tout } x \in D(A) \cap D(B).$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, l'opérateur AB^{-1} de domaine $\{x \in X\ ;\ B^{-1}x \in D(A)\}$ est le générateur analytique du groupe $(U(s)V(-s))_{s\in\mathbb{R}}$. Or le type de ce groupe fortement continu est au plus égal à $\omega_1 + \omega_2$, il est donc strictement inférieur à π. Comme X possède la propriété UMD, d'après le corollaire 4.3, on sait que $-1 \in \rho(AB^{-1})$, c'est-à-dire que $(1 + AB^{-1})^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Ainsi, $B^{-1}(1 + AB^{-1})^{-1} : X \longrightarrow D(A) \cap D(B)$ est un opérateur borné sur X et, pour tout $x \in X$, on a $(A + B)B^{-1}(1 + AB^{-1})^{-1}x = (1 + AB^{-1})(1 + AB^{-1})^{-1}x = x$. Et donc, l'opérateur $(A + B, D(A) \cap D(B))$ est fermé, inversible sur X, d'inverse $B^{-1}(1 + AB^{-1})^{-1}$. □

4.1.2 Le problème de Cauchy

Soit Y un espace de Banach. On veut trouver un résultat de régularité maximale pour le problème suivant

$$(PC) \qquad \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t)\ ,\ 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire sur Y, générateur analytique d'un groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ fortement continu.
On suppose que le type du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. On a alors le résultat suivant

Théorème 4.9. *Soit A l'opérateur considéré plus haut. On suppose que Y est un espace de Banach UMD. Alors le problème (PC) vérifie la régularité maximale sur $L^p(0,T;Y)$, $1 < p < \infty$, c'est-à-dire pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, il existe une unique solution u de (PC) vérifiant $u \in W^{1,p}(0,T;Y) \cap L^p(0,T;D(A))$.*

Démonstration. La méthode est ici d'appliquer le corollaire 4.7. On considère l'opérateur $\tilde{A}$ défini par

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = L^p(0,T;D(A)), \\ (\tilde{A}u)(t) = Au(t), \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

D'autre part, on considère l'opérateur B défini par

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in W^{1,p}(0,T;Y)\ ;\ u(0) = 0\}, \\ Bu = u'. \end{cases}$$

On sait que l'opérateur B est inversible et possède des puissances imaginaires bornées sur $L^p(0,T;Y)$ car B^{-1} est le générateur analytique de la trace du semi-groupe de Riemann-Liouville (voir exemple 2.6). De plus, les puissances imaginaires de B vérifient l'estimation suivante (voir [Ama95], ex. 4.7.3.c, ou [AEH95])

$$\|B^{is}\| \leq C_p(Y)(1 + s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|}, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R},$$

où $C_p(Y)$ est une constante qui ne dépend que de p et de X.
En ce qui concerne l'opérateur $\tilde{A}$, on a, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ et on a

$$\left((\lambda - \tilde{A})^{-1}u\right)(t) = (\lambda - A)^{-1}u(t), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Ainsi, d'après la proposition 3.14, on a que $\tilde{A}$ est le générateur analytique du groupe fortement continu $(\tilde{U}(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur $L^p(0, T; Y)$ défini par

$$\left(\tilde{U}(s)f\right)(t) = U(s)f(t), \quad t \in [0, T], \ s \in \mathbb{R},$$

pour tout $f \in L^p(0, T; Y)$. Le type de $(\tilde{U}(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$.
L'espace Y étant UMD, $L^p(0, T; Y)$ l'est aussi. On se trouve alors dans les hypothèses du corollaire 4.7. Ainsi, l'opérateur $\tilde{A} + B$ est fermé et inversible. □

4.2 Espaces de Hardy et groupes bornés

Dans cette section, $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ désigne un groupe fortement continu sur un espace de Banach X ; on note C son générateur analytique et $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$.

4.2.1 Transformation de Hilbert

On s'intéresse, dans ce paragraphe, à un groupe fortement continu borné sur un espace de Banach X, tel que l'intégrale

$$\frac{i}{\pi} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq T} \frac{U(s)x}{s} \, ds =: H^U_{\varepsilon,T}x$$

admet une limite forte pour tout $x \in X$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $T \to +\infty$. Lorsque ceci est vérifié, cette limite définit un opérateur borné H^U sur X, appelé **transformation de Hilbert associée à** $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$.

Remarque 4.10. *Dans le cas du groupe des translations sur un espace $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, il s'agit de la transformation de Hilbert usuelle.*

D'autre part, si C désigne le générateur analytique du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$, la proposition 3.6 assure que la convergence lorsque $\varepsilon \to 0^+$ de $H^U_{\varepsilon,T}x$ pour tout $x \in X$ est équivalente à $\rho(C) \neq \emptyset$.

Proposition 4.11. *Soit $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe borné sur un espace de Banach X possédant la propriété UMD. Alors*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ T \to +\infty}} H^U_{\varepsilon,T}x = H^U x$$

existe pour tout $x \in X$.

Démonstration. On considère la quantité $\int_{\varepsilon\le|s|\le1}\frac{V(s)x}{s}\,ds =: \Lambda_V^\varepsilon x$ pour tout groupe $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ borné. D'après le lemme 4.1, $\lim_{\varepsilon\to0^+}\Lambda_V^\varepsilon x$ existe pour tout $x\in X$. De plus, Λ_V défini sur X par $\Lambda_V x := \lim_{\varepsilon\to0^+}\Lambda_V^\varepsilon x$ pour tout $x\in X$, est un opérateur borné sur X. Pour tout $\varepsilon\in(0,1)$, on sait que

$$\|\Lambda_V^\varepsilon\| \le c\left(\mathcal{H}_2, \sup_{s\in\mathbb{R}}\|V(s)\|\right)$$

où $\mathcal{H}_2$ a été défini dans la définition 1.5. On note $M := \sup_{s\in\mathbb{R}}\|U(s)\|$. On sait aussi que $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon\le|s|\le1}\frac{U(s)x}{s}\,ds$ existe pour tout $x\in X$.
D'autre part, on a, pour tout $T>1$ et pour tout $x\in X$,

$$\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds = \int_{\frac{1}{T}\le|s|\le1}\frac{U(Ts)x}{s}\,ds.$$

Comme $\|U(Ts)\|\le M$ pour tout $s\in\mathbb{R}$, on a pour tout $T>1$ et pour tout $x\in X$,

$$\left\|\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds\right\| \le c(\mathcal{H}_2, M)\|x\|.$$

De plus, soit G le générateur infinitésimal du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Comme X est UMD, il est en particulier réflexif et donc $N(G)\oplus\overline{R(G)} = X$.
• Soit $x\in N(G)$. Alors $U(s)x = x$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds = 0.$$

• Soit $x\in R(G)$. On considère alors $y\in D(G)$ tel que $x = Gy$. On a ainsi, en intégrant par parties,

$$\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds = \left[\frac{U(s)y}{s}\right]_{1\le|s|\le T} + \int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)y}{s^2}\,ds.$$

D'où, $\lim_{T\to+\infty}\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds$ existe et vaut $-U(1)y - U(-1)y + \int_{|s|\ge1}\frac{U(s)y}{s^2}\,ds$.
Comme on sait d'après ce qui précède que $\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)}{s}\,ds$ est un opérateur borné sur X indépendamment de $T>1$, on a, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{1\le|s|\le T}\frac{U(s)x}{s}\,ds$$

existe pour tout $x\in\overline{R(G)}$.
Enfin, pour terminer cette démonstration, il suffit d'utiliser le fait que $N(G)\oplus\overline{R(G)} = X$ pour trouver le résultat annoncé. □

Dans la suite, le but est de montrer que, dans le cas où il y a effectivement convergence forte de $H^U_{\varepsilon,T}$ vers H^U lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $T \to +\infty$, la transformation de Hilbert associée à $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ vérifie $\left(H^U\right)^3 = H^U$.
Dorénavant, on ne s'intéresse qu'à des groupes $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ bornés sur un espace de Banach X, non nécessairement UMD, mais pour lesquels il y a convergence forte de $H^U_{\varepsilon,T}$ vers H^U lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $T \to +\infty$.
Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}$ la transformation de Fourier de f, *i.e.* $\hat{f}(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} f(t)\, dt$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Le lemme suivant indique une classe de fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ telles qu'il y a convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ de $H_{\varepsilon,T}f$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $T \to +\infty$, où $H_{\varepsilon,T}f(t) := \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq T} \frac{f(t-s)}{s}\, ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 4.12. *(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, supp($\hat{f}$) compact, inclus dans $(0,+\infty)$. Alors* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ T\to+\infty}} \left(\|H_{\varepsilon,T}f - f\|_{L^1}\right) = 0$.
(ii) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, supp($\hat{f}$) compact, inclus dans $(-\infty,0)$. Alors $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ T\to+\infty}} \left(\|H_{\varepsilon,T}f + f\|_{L^1}\right) = 0$.

Preuve. (i) Supposons que $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subset [a,b] \subset (0,+\infty)$. Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{it\sigma}\hat{f}(\sigma)\, d\sigma.$$

On peut alors prolonger f de manière holomorphe sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) := \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{iz\sigma}\hat{f}(\sigma)\, d\sigma.$$

Ce prolongement de f vérifie alors, après intégrations par parties, pour $\Im(z) \geq 0$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq e^{-a\Im(z)} \min\left\{ \frac{b-a}{2\pi|z|^2} \sup_{\sigma\in[a,b]} |\hat{f}"(\sigma)| \;;\; \frac{b-a}{2\pi} \sup_{\sigma\in[a,b]} |\hat{f}(\sigma)| \right\} \\ &\leq \kappa\frac{e^{-a\Im(z)}}{1+|z|^2}, \end{aligned}$$

où κ est une constante qui ne dépend que de f. On peut alors calculer $H_{\varepsilon,T}f$. Soit $\varepsilon \in (0,1)$ fixé ainsi que $T > 1$. On considère le chemin $\mathcal{G}^+_{\varepsilon,T} \subset \{z \in \mathbb{C} \;;\; \Im(z) \geq 0\}$ suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+_{\varepsilon,T} \;:=\; & (t=0, s\in[T,\varepsilon]) \;\cup\; \left\{z\in\mathbb{C} \;;\; |z| = \varepsilon,\ \arg(z) \in [\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{2}]\right\} \;\cup \\ & (t=0, s\in[-\varepsilon,-T]) \;\cup\; \left\{z\in\mathbb{C} \;;\; |z| = T,\ \arg(z) \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\right\} \end{aligned}$$

où on note $z = t + is$ pour $t, s \in \mathbb{R}$, orienté dans le sens direct. D'après le théorème des résidus, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{G}^+_{\varepsilon,T}} \frac{f(t+iz)}{z}\, dz = 0$. C'est-à-dire, pour tout

$t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon\le|s|\le T}\frac{f(t-s)}{s}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+i\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+iTe^{i\theta})\,d\theta.$$

• Pour tout $T > 1$, on a, grâce à l'estimation précédente de f,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+iTe^{i\theta})\,d\theta\right| dt &\le \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-aT\cos\theta}}{1+|t+iTe^{i\theta}|^2}\,d\theta\right) dt\\ &\le \kappa\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(|t|-T)^2}\,dt\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-aT\cos\theta}\,d\theta\right)\\ &\le \kappa(\pi+2\arctan T)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-aT\cos\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+iTe^{i\theta})\,d\theta\right| dt = 0.$$

• D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+i\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = f(t),$$

et pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, on a, comme précédemment,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t+i\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\right| dt &\le \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a\varepsilon\cos\theta}}{1+|t+i\varepsilon e^{i\theta}|^2}\,d\theta\right) dt\\ &\le \pi\kappa\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(|t|-\varepsilon)^2}\,dt\right)\\ &\le 2\pi^2\kappa.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ T\to+\infty}} H_{\varepsilon,T}f$ existe dans $L^1(\mathbb{R})$ et vaut f.

(ii) Le résultat *(ii)* se montre en utilisant *(i)* en posant $g(t) = f(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Lemme 4.13. *(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, supp($\hat{f}$) compact, inclus dans $(0,+\infty)$. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U x\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)x\,dt$$

pour tout $x \in X$.

(ii) D'autre part, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, supp($\hat{f}$) compact, inclus dans $(-\infty,0)$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U x\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)x\,dt$$

pour tout $x \in X$.

Preuve. Pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout $T > 1$, on note, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$H_{\varepsilon,T}f(t) := \frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon \le |s| \le T} \frac{f(t-s)}{s}\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On considère une fonction f comme dans *(i)* ou *(ii)*. Soit $x \in X$ fixé. On a, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et pour tout $T > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U_{\varepsilon,T}x\, dt &= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)\left(\int_{\varepsilon \le |s| \le T} \frac{U(s)x}{s}\, ds\right) dt \\
&= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\varepsilon \le |s| \le T} f(t)U(t+s)x\, \frac{ds}{s}\right) dt, \text{ par Fubini} \\
&= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\varepsilon \le |s| \le T} \frac{f(t-s)}{s}U(t)x\, ds\right) dt, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\varepsilon,T}f(t)U(t)x\, dt, \text{ par Fubini.}
\end{aligned}$$

On sait de plus que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ T \to +\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U_{\varepsilon,T}x\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U x\, dt.$$

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ T \to +\infty}} H_{\varepsilon,T}f$ existe dans $L^1(\mathbb{R})$ et vaut $\pm f$ d'après le lemme précédent. Ainsi,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ T \to +\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\varepsilon,T}f(t)U(t)x\, dt = \pm\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U x\, dt.$$

On a donc le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)H^U x\, dt = \pm\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)U(t)x\, dt.$$

□

Le lemme suivant annonce un résultat bien connu (voir par exemple [CZ76a]).

Lemme 4.14. *Pour tout $\alpha \in (0,+\infty)$, il existe une fonction $\varphi_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\varphi}_\alpha \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, supp$(\hat{\varphi}_\alpha) \subset [-3\alpha, 3\alpha]$, $\hat{\varphi}_\alpha = 1$ sur $[-\alpha,\alpha]$.*
De plus, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)U(t)x\, dt = x$, pour tout $x \in X$.

Preuve. Soit $\alpha \in (0,+\infty)$ fixé. On définit la fonction ψ_α sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_\alpha(s) := \begin{cases} 0 \text{ si } s \in (-\infty, -3\alpha], \\ \dfrac{2}{\alpha^2} \text{ si } s = -\dfrac{5\alpha}{2}, \\ -\dfrac{2}{\alpha^2} \text{ si } s = -\dfrac{3\alpha}{2}, \\ 0 \text{ si } s \in [-\alpha, 0], \end{cases}$$

ψ_α linéaire sur chaque intervalle $\left[-3\alpha, -\frac{5\alpha}{2}\right]$, $\left[-\frac{5\alpha}{2}, -\frac{3\alpha}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\alpha}{2}, -\alpha\right]$, et ψ_α paire. On peut alors définir la fonction φ_α par

$$\hat{\varphi}_\alpha(s) := \int_{-\infty}^{s} \left(\int_{-\infty}^{t} \psi_\alpha(u)\, du \right) dt, \qquad s \in \mathbb{R},$$

et donc

$$\varphi_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} \hat{\varphi}_\alpha(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction convient. □

Lemme 4.15. *Soit $x \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble défini dans le lemme 2.9. On pose $\limsup_{N\to+\infty} \|C^N x\|^{\frac{1}{N}} =: c_+(x)$ et $\limsup_{N\to-\infty} \|C^N x\|^{\frac{1}{|N|}} =: c_-(x)$. Ainsi, on a $c_+(x)c_-(x) \geq 1$ et $\|C^m x\| \leq M c_+(x)^m \|x\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, où $M := \sup_{s\in\mathbb{R}} \|U(s)\|$.*

Preuve. On note $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ l'extension analytique du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ dont C est le générateur analytique.

- Si $\limsup_{N\to+\infty} \|C^N x\|^{\frac{1}{N}} = +\infty$ ou si $\limsup_{N\to-\infty} \|C^N x\|^{\frac{1}{|N|}} = +\infty$, alors le résultat annoncé est clair.
- Supposons maintenant que ces deux limites sont finies. Soit $m \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$. D'après le théorème des trois lignes d'Hadamard ([RS75], Appendix to IX.4 : Abstract interpolation) on a,

$$\|C_{nz} x\| \leq \left(\sup_{s\in\mathbb{R}} \|C_{ins} x\| \right)^{1-\Re(z)} \left(\sup_{s\in\mathbb{R}} \|C_{n(1+is)x}\| \right)^{\Re(z)}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \Re(z) \leq 1$. C'est-à-dire, pour $z = \frac{m}{n}$,

$$\|C^m x\| \leq (M\|x\|)^{1-\frac{m}{n}} (M\|C^n x\|)^{\frac{m}{n}}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $\|C^m x\| \leq c_+(x)^m M \|x\|$. Comme $x \in \mathcal{D}$, on peut appliquer cette dernière inégalité à $C^{-m}x$, et on obtient $\|C^m(C^{-m}x)\| \leq c_+(x)^m M \|C^{-m}x\|$ car $c_+(x) = c_+(C^{-m}x)$. Ainsi, $\|x\|^{\frac{1}{m}} \leq c_+ M^{\frac{1}{m}} \|C^{-m}x\|^{\frac{1}{m}}$. Lorsque $m \to +\infty$, on obtient $1 \leq c_+(x)c_-(x)$, ce qui est le résultat cherché. □

Proposition 4.16. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in X$, le vecteur $\left(H^U\right)^2 x - x$ est soit un vecteur propre de l'opérateur $U(t)$ pour la valeur propre 1, soit nul.*

Démonstration. Pour $x \in X$, on pose $y := \left(H^U\right)^2 x - x$. Supposons que $y \neq 0$. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) U(t) x\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_n * \varphi_\varepsilon)(t) U(t) x\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_n - \varphi_n * \varphi_\varepsilon)(t) U(t) x\, dt,$$

où les fonctions φ_n, $n \in \mathbb{N}$ et φ_ε sont des fonctions comme dans le lemme 4.14. On pose $\phi_{n,\varepsilon} := \varphi_n - \varphi_n * \varphi_\varepsilon$; ainsi, $\hat{\phi}_{n,\varepsilon} = \hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_n\hat{\varphi}_\varepsilon$. On a donc $\hat{\phi}_{n,\varepsilon} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{supp}(\hat{\phi}_{n,\varepsilon}) \subset [-3n, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 3n]$. On pose alors

$$\phi^1_{n,\varepsilon}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{it\tau}\hat{\phi}_{n,\varepsilon}(\tau)\; d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

et

$$\phi^2_{n,\varepsilon}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{it\tau}\hat{\phi}_{n,\varepsilon}(\tau)\; d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\phi^i_{n,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$ et $\hat{\phi}^i_{n,\varepsilon} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ pour $i = 1, 2$, $\mathrm{supp}(\hat{\phi}^1_{n,\varepsilon}) \subset [\varepsilon, 3n]$, $\mathrm{supp}(\hat{\phi}^2_{n,\varepsilon}) \subset [-3n, -\varepsilon]$. D'après le lemme 4.13, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^i_{n,\varepsilon}(t)U(t)y\; dt = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)U(t)y\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_n * \varphi_\varepsilon)(t)U(t)y\; dt.$$

Or $\widehat{\varphi_n * \varphi_\varepsilon} = \hat{\varphi}_n\hat{\varphi}_\varepsilon = \hat{\varphi}_\varepsilon$ car $\hat{\varphi}_n = 1$ sur $\mathrm{supp}(\hat{\varphi}_\varepsilon)$. Donc $\varphi_n * \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$ et on a, pour tout $n \geq 3$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)U(t)y\; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)U(t)y\; dt.$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$ et on obtient, pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t)U(t)y\; dt.$$

D'autre part, la fonction φ_ε admet un prolongement holomorphe par la formule suivante

$$\varphi_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-3\varepsilon}^{3\varepsilon} e^{izs}\hat{\varphi}_\varepsilon(s)\; ds, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient l'estimation suivante, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|\varphi_\varepsilon(z)| \leq \frac{4\varepsilon}{2\pi|z|^2}e^{3\varepsilon|\Im(z)|}\sup_{s\in[-3\varepsilon,3\varepsilon]}|\hat{\varphi}_\varepsilon"(s)|.$$

Ainsi, la fonction $is \mapsto U(s)y$ admet un prolongement holomorphe f_y sur $\mathbb{C}$ donné par la formule

$$f_y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(t + iz)U(t)y\; dt, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, $y \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble défini dans le lemme 2.9. Et donc, si on pose $M := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\|$, on a l'estimation suivante, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|f_y(z)\| &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} e^{3\varepsilon|\Re(z)|} \sup_{s\in[-3\varepsilon,3\varepsilon]} |\hat{\varphi}_\varepsilon"(s)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M\|y\|}{t^2+\Re(z)^2}\, dt \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\pi} e^{3\varepsilon|\Re(z)|} \sup_{s\in[-3\varepsilon,3\varepsilon]} |\hat{\varphi}_\varepsilon"(s)| \frac{M\|y\|}{|\Re(z)|}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $z = N \in \mathbb{Z}$, on a $f_y(N) = C^N y$. Ainsi,

$$\|C^N y\|^{\frac{1}{|N|}} \leq e^{3\varepsilon} \left(\frac{2\varepsilon}{\pi|N|} \sup_{s\in[-3\varepsilon,3\varepsilon]} |\hat{\varphi}_\varepsilon"(s)|\ M\|y\| \right)^{\frac{1}{|N|}}.$$

Lorsqu'on fait tendre $|N|$ vers $+\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} l_+ &:= \limsup_{N\to+\infty} \|C^N y\|^{\frac{1}{N}} \leq e^{3\varepsilon}, \\ l_- &:= \limsup_{N\to-\infty} \|C^N y\|^{\frac{1}{|N|}} \leq e^{3\varepsilon}, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. Ainsi, $l_+ \leq 1$ et $l_- \leq 1$.
D'autre part, $l_+ l_- \geq 1$. C'est le lemme 4.15. Ainsi, $l_+ = 1$ et $l_- = 1$. D'autre part, l'application $z = t + is \longmapsto C_z y = U(s)C_t y$ est holomorphe de $\mathbb{C}$ dans X et d'après le lemme 4.15, $\|C_z y\| \leq M^2\|y\|$. Cette application holomorphe est ainsi bornée ; elle est donc constante. Ainsi, $C_z y = C_0 y = y$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier, $Cy = y$ et $U(s)y = y$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. □

Corollaire 4.17. $\left(H^U\right)^3 = H^U$.

Démonstration. On sait, d'après la proposition précédente, que

$$U(t)\left(\left(H^U\right)^2 x - x\right) = \left(H^U\right)^2 x - x \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \ \text{ pour tout } x \in X.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, pout tout $T > 1$, on a

$$\int_{\varepsilon\leq|t|\leq T} \frac{U(t)}{t} \left(\left(H^U\right)^2 x - x\right) dt = \int_{\varepsilon\leq|t|\leq T} \frac{1}{t} \left(\left(H^U\right)^2 x - x\right) dt = 0$$

En faisant tendre ε vers 0^+ et T vers $+\infty$, on a $H^U\left(\left(H^U\right)^2 x - x\right) = 0$. □

4.2.2 Espaces de Hardy

Le but ici est de définir des espaces de Hardy associés à un groupe borné U comme plus haut.

Proposition 4.18. *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds = \frac{1}{2}\left(x + H^U x\right).$$

Démonstration. • Soit $\delta \in (0,1)$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds &= \int_{|s|\le\delta} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds + \int_{\delta\le|s|\le 1} \left(\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right) U(s)x\, ds \\ &\quad + \int_{|s|\ge 1} \left(\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right) U(s)x\, ds + \int_{|s|\ge\delta} \frac{U(s)x}{s}\, ds.\end{aligned}$$

Le quatrième terme est borné uniformément en δ car il converge, lorsque δ tend vers 0^+, vers $H^U x$.
Le troisième terme est borné par $M\|x\|\delta \int_{|s|\ge 1} \frac{1}{s^2}\, ds < \infty$ car $\left|\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right| \le \frac{\delta}{s^2}$.
En ce qui concerne le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\delta\le|s|\le 1} \left(\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right) U(s)x\, ds\right\| &\le 2M\|x\| \int_{\delta}^{1} \frac{\delta}{|s|\sqrt{s^2+\delta^2}}\, ds \\ &\le 2M\|x\| \int_{\delta}^{1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\delta}\right) ds \\ &\le 2M\|x\| \ln\left(\frac{2}{1+\delta}\right) \le 2M\|x\| < \infty.\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a

$$\begin{aligned}\left\|\int_{|s|\le\delta} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds\right\| &\le M\|x\| \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{s^2+\delta^2}}\, ds \\ &\le \pi M\|x\| < \infty.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds$ est borné uniformément en δ.

• D'autre part, pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds = \int_{|s|\le 1} \frac{U(s)x}{s+i\delta}\, ds + \int_{|s|\ge 1} \left(\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right) U(s)x\, ds + \int_{|s|\ge 1} \frac{U(s)x}{s}\, ds.$$

Le troisième terme est indépendant de δ
Le deuxième terme se traite de la façon suivante. On écrit

$$\int_{|s|\ge 1} \left(\frac{1}{s+i\delta} - \frac{1}{s}\right) U(s)x\, ds = -i\delta \int_{|s|\ge 1} \frac{1}{s(s+i\delta)} U(s)x\, ds.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|s|\ge 1} \frac{1}{s(s+i\delta)} U(s)x\, ds = \int_{|s|\ge 1} \frac{1}{s^2} U(s)x\, ds.$$

Ainsi,

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|s|\geq 1}\left(\frac{1}{s+i\delta}-\frac{1}{s}\right)U(s)x\ ds=0.$$

La partie la plus délicate consiste à traiter le premier terme, $\displaystyle\int_{|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s+i\delta}\ ds$. On note f_x le prolongement régulier de $is\mapsto U(s)x$ sur $\mathbb{C}$ et $(C_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ l'extension analytique du groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. On a alors, pour tout $s\in\mathbb{R}$, $U(s)x=C_\delta f_x(is-\delta)$. On choisit $\varepsilon\in(0,\delta)$. On note $\Gamma_{\varepsilon,\delta}\subset\{z\in\mathbb{C}\ ;\ \Re(z)\leq 0\}$ le contour, orienté dans le sens positif

$$\begin{aligned}(s\in[-1,1]\ ,\ t=-\delta)\ \cup\ (t\in[-\delta,0]\ ,\ s=1)\ \cup\ (t=0\ ,\ s\in[1,\varepsilon])\ \cup\\ \left\{z\in\mathbb{C}\ ;|z|=\varepsilon,\ \arg(z)\in[\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2}]\right\}\ \cup\ (t=0\ ,\ s\in[-\varepsilon,-1])\\ \cup\ (t\in[0,-\delta]\ ,\ s=-1)\end{aligned}$$

où $z=t+is$, $t,s\in\mathbb{R}$. Comme $z\mapsto\dfrac{f_x(z)}{z}$ est holomorphe dans $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$, on a

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}}\frac{f_x(z)}{z}\ dz=0.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon\in(0,\delta)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{|s|\leq 1}\frac{U(s)C_{-\delta}x}{s+i\delta}\ ds\ &=\ \int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{f_x(is)}{s}\ ds-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f_x(\varepsilon e^{i\theta})\ id\theta+\\ &\qquad\int_0^\delta\left(\frac{f_x(-i-t)}{i+t}+\frac{f_x(i-t)}{i-t}\right)\ dt.\end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon\to 0^+$, on a

$$\begin{aligned}\int_{|s|\leq 1}\frac{U(s)C_{-\delta}x}{s+i\delta}\ ds\ &=\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s}\ ds\right)-i\pi x+\\ &\qquad\int_0^\delta\left(\frac{U(-1)C_{-t}x}{i+t}+\frac{U(1)C_{-t}x}{i-t}\right)\ dt.\end{aligned}$$

Et donc, lorsque $\delta\to 0^+$, on a

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s+i\delta}\ ds=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s}\ ds\right)-i\pi x.$$

Et on obtient le résultat cherché par le théorème de Banach-Steinhaus car $\mathcal{D}$ est dense dans X. $\square$

Pour tout $x\in X$, on pose $P_0x:=\left(1-\left(H^U\right)^2\right)x$, $P_+x:=\dfrac{1}{2}\left(\left(H^U\right)^2x+H^Ux\right)$ et $P_-x:=\dfrac{1}{2}\left(\left(H^U\right)^2x-H^Ux\right)$. Les trois opérateurs P_0, P_+ et P_- sont des projections sur X. Il est facile de vérifier que $P_0^2=P_0$, $P_+^2=P_+$ et $P_-^2=P_-$ en utilisant le corollaire 4.17. De même, on peut remarquer que ces opérateurs commutent et que

$P_0P_+ = P_+P_- = P_-P_0 = 0$. De plus, par construction, on a $P_0 + P_+ + P_- = 1$. On note alors $X_0 := P_0X$, $X_+ := P_+X$ et $X_- := P_-X$. Ces trois sous-espaces de X sont invariants par le groupe $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. De plus, on a $X = X_0 + X_+ + X_-$.
Pour $x \in X_0$, d'après la proposition 4.16, $U(s)x = x$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \in \mathcal{D}$ et le prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ de $is \mapsto U(s)x$ est la fonction constante égale à x.
Dans la suite, nous étudions le comportement de $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur X_+ et sur X_-.

Théorème 4.19. *(i) Pour tout $x \in X_+$, l'application $is \mapsto U(s)x$ admet un prolongement régulier sur $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(z) > 0\}$ donné par*

$$z \longmapsto \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds.$$

(ii) Pour tout $x \in X_-$, l'application $is \mapsto U(-s)x$ admet un prolongement régulier sur $\mathbb{C}_+$ donné par

$$z \longmapsto \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(-s)x}{s+iz}\, ds.$$

Démonstration. (i) L'application $z \longmapsto \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$ pour tout $x \in X$, et en particulier pour $x \in X_+$. En effet,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds \;&=\; \int_{|s-\Im(z)|\le 1} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds + \int_{|s-\Im(z)|\ge 1} \frac{-i\Re(z)}{(s-\Im(z))(s+iz)}\, U(s)x\, ds \\ &\quad + \int_{|s-\Im(z)|\ge 1} \frac{U(s)x}{s-\Im(z)}\, ds.\end{aligned}$$

Cette décomposition montre la convergence uniforme de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds$ sur tout $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \Re(z) > \varepsilon > 0\}$. Ainsi, l'application considérée est bien holomorphe.
D'autre part, d'après la proposition 4.18, on sait que

$$\lim_{\Re(z)\to 0^+} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds = U(\Im(z)) \left(\frac{1}{2} \left(x + H^U x \right) \right).$$

Comme $x \in X_+$, on a $\dfrac{1}{2}\left(x + H^U x\right) = x$, d'après le corollaire 4.16. Ainsi,

$$z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \longmapsto \begin{cases} \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(s)x}{s+iz}\, ds & \text{si } \Re(z) > 0, \\[2ex] U(\Im(z))x & \text{si } \Re(z) = 0 \end{cases}$$

est un prolongement régulier de $is \mapsto U(s)x$ sur $\mathbb{C}_+$.
(ii) Il suffit de reprendre les arguments précédents pour le groupe $(V(s))_{s\in\mathbb{R}}$ où $V(s) := U(-s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. □

Remarque 4.20. *On peut remarquer que dans le cas où* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est le groupe des translations sur un espace* $L^p(\mathbb{R};X)$, $p \in (1,\infty)$ *et* X *un espace de Banach* UMD, *le sous-espace* X_0 *est réduit à* $\{0\}$ *et les sous-espaces* X_+ *et* X_- *correspondent aux espaces de Hardy vectoriels* $H^p(\mathbb{R};X)$ *définis par (voir par exemple [HP57], section 6.4)*

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{R};X) \;:=\; & \{f \in L^p(\mathbb{R};X)\ ;\ f \text{ régulière sur } \{z\in\mathbb{C}; \Im(z)>0\}, \\ & t \mapsto f(z+t) \in L^p(\mathbb{R};X), \text{ pour tout } z\in\mathbb{C},\ \Im(z)\geq 0, \\ & \text{et} \sup_{\Im(z)\geq 0} \|f(z+.)\|_p < \infty\}. \end{aligned}$$

Remarque 4.21. *Les résultats précédents nous assurent l'existence des projections sur tous les sous-espaces propres du générateur analytique* C *du groupe* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *considéré.*

En effet, pour tout $\lambda \in (0,+\infty) \supset \sigma(C)$, on considère le groupe $(\lambda^{-is}U(s))_{s\in\mathbb{R}}$. Alors la projection P_0 correspondant à ce groupe donne la projection sur le sous-espace propre (éventuellement $\{0\}$) associé à la valeur propre (éventuelle) λ de C. □

Corollaire 4.22. *Soit* $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *la part de* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *dans* X_+ *et* $(U_-(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *la part de* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *dans* X_-. *Alors* $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est la trace d'un semi-groupe holomorphe d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *sur* X_+ *et* $(U_-(-s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est la trace d'un semi-groupe holomorphe d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *sur* X_-.

Ainsi, si on note C_+ le générateur analytique de $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur X_+ et C_- le générateur analytique de $(U_-(s))_{s\in\mathbb{R}}$ sur X_-, C_+ est borné et C_- est inversible.

Proposition 4.23. *Soit* $p \in (1,\infty)$, *soit* X *un espace de Banach. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R};X)$, *il existe deux fonctions* $g,h \in H^p(\mathbb{R};X)$ *telles que* $f(t) = g(t) + h(-t)$ *pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$.
(ii) X *possède la propriété* UMD.

Démonstration. L'implication *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* provient directement du corollaire 4.22 et de la remarque 4.21.
Inversement, supposons qu'on ait la décomposition *(i)*. On note $(\tau(s))_{s\in\mathbb{R}}$ le groupe des translations sur $L^p(\mathbb{R};X)$ et C son générateur analytique. Alors $g \in D(C^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h \in R(C^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, *(i)* implique que $L^p(\mathbb{R};X) = D(C) + R(C)$. D'après la proposition 3.6, ceci est équivalent à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{\tau(s)f}{s}\, ds$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R};X)$. D'après la proposition 1.9, ceci implique que X est un espace de Banach UMD. □

4.2.3 Cas particulier des groupes périodiques

Nous allons traiter maintenant le cas des groupes périodiques, et plus particulièrement les groupes 2π-périodiques. Il s'agit de groupes bornés.

Supposons que $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu 2π-périodique sur un espace de Banach X quelconque. On note C son générateur analytique. D'après la proposition 3.6, l'ensemble résolvant de C est non vide si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1}\frac{U(s)x}{s}\,ds$ converge fortement dans X pour tout $x\in X$, ou, de manière équivalente, si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq\pi}\frac{U(s)x}{2\tan\frac{s}{2}}\,ds$ converge fortement dans X pour tout $x\in X$. Dans ce cas-là, on note $h^U x$ la quantité $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{i}{\pi}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq\pi}\frac{U(s)x}{2\tan\frac{s}{2}}\,ds.$ Ainsi, h^U est un opérateur borné sur X.

Remarque 4.24. *Cet opérateur h^U est à rapprocher de la transformation de Hilbert sur le tore. En effet, si $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est le groupe des translations sur $L^p(\mathbb{T};X)$, $p\in(1,\infty)$, alors h^U est exactement la transformation de Hilbert sur le tore étudiée dans le chapitre 1.*

On considère donc maintenant des groupes 2π-périodiques tels que l'ensemble résolvant du générateur analytique est non vide. On peut noter que cette hypothèse est plus faible, au moins formellement, que la condition d'existence de l'opérateur H^U, comme dans les deux paragraphes précédents. On a vu (Proposition 4.11), que dans le cas d'un espace de Banach UMD, ces notions correspondent.
On suppose donc que $\rho(C)\neq\emptyset$. On a alors le résultat suivant.

Proposition 4.25. $\left(h^U\right)^3 = h^U$

Démonstration. Il suffit de reprendre les arguments de la proposition 4.16 et du corollaire 4.17 en utilisant la transformation de Hilbert sur le tore plutôt que la transformation de Hilbert sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 4.26. *Pour tout $x\in X$, on a*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{U(s)x}{2\tan\left(\frac{s+i\delta}{2}\right)}\,ds = \frac{1}{2}\left(x+h^U x\right).$$

Démonstration. On procède ici de la même manière que pour la démonstration de la proposition 4.18. □

On peut alors énoncer un théorème analogue au théorème 4.19 et corollaire 4.22 pour les groupes 2π-périodiques. On pose pour tout $x\in X$, $Q_0x=\left(1-\left(h^U\right)^2\right)x$, $Q_+x=\left(\left(h^U\right)^2x+\left(h^U\right)x\right)$ et $Q_-x=\left(\left(h^U\right)^2x-\left(h^U\right)x\right)$. Comme dans le paragraphe précédent, ces trois opérateurs sont des projections sur X qui commutent et qui vérifient $Q_0+Q_++Q_-=1$. On note alors $X_0:=Q_0X$, $X_+:=Q_+X$ et $X_-:=Q_-X$.

Remarque 4.27. *Dans le cas où l'intégrale* $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|s|\leq T} \frac{U(s)x}{s}\, ds$ *converge fortement dans* X *pour totu* $x \in X$, *les projections* Q_+, Q_- *et* Q_0 *sont les mêmes que les projections* P_+, P_- *et* P_0. *On peut remarquer que c'est le cas lorsque l'espace* X *possède la propriété* UMD.

Théorème 4.28. *Soit* $(U_0(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *la part de* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *dans* X_0, $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *la part de* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *dans* X_+ *et* $(U_-(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *la part de* $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *dans* X_-. *Alors* $(U_0(s))_{s\in\mathbb{R}}$, $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *et* $(U_-(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *sont des groupes* 2π*-périodiques qui vérifient*
· X_0 *est soit le sous-espace vectoriel propre associé à la valeur propre* 1 *du générateur analytique* C_0 *de* $(U_0(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *sur* X_0, *soit réduit à* $\{0\}$,
· $(U_+(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est la trace d'un semi-groupe holomorphe d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *sur* X_+, *et donc son générateur analytique* C_+ *est borné,*
· $(U_-(-s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est la trace d'un semi-groupe holomorphe d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *sur* X_-, *et donc le générateur analytique* C_- *de* $(U_-(s))_{s\in\mathbb{R}}$ *est inversible.*

4.3 Notes

Certains des résultats des chapitres 2, 3 et 4 ont été montrés par I. Ciorănescu et L. Zsidó dans [CZ76a] ou par L. Zsidó dans [Zsi83]. Les démonstrations données dans cette thèse sont parfois un peu différentes ; elles sont mentionnées pour plus de clarté. Le but de cette section est de rendre à César ce qui est à César.

La notion de générateur analytique de groupe a été introduite par I. Ciorănescu et L. Zsidó dans [CZ76a]. Elle est reprise dans cette thèse, sous la forme de la définition 2.3. Pour commencer, le lemme 2.9 correspond à [CZ76a], Lemma 2.2. C'est un lemme qui donne la densité de l'ensemble $\mathcal{D}$ dans X. C'est là qu'apparaît la suite régularisante qui intervient dans beaucoup de démonstrations des chapitres 2 et 3. La démonstration de la proposition 2.10, établissant que le générateur analytique d'un groupe est fermé, est inspirée d'une partie de [CZ76a], Theorem 2.4, déjà repris dans [Van75], Proposition 1.3. Ce théorème de [CZ76a] (Theorem 2.4) donne aussi une partie de la proposition 2.16 sur la propriété de semi-groupe de l'extension analytique d'un groupe. Le chapitre 2 donne donc beaucoup de résultats connus, mais dans l'optique de rapprocher les générateurs analytiques de groupes et les opérateurs qui admettent des puissances imaginaires bornées, notion rappelée dans le chapitre 1.

Quelques résultats du chapitre 3 se trouvent aussi dans [CZ76a], dans le cas où le groupe étudié est borné. Ainsi, la proposition 3.3, qui donne une expression de la résolvante du générateur analytique, est à rapprocher de [CZ76a], Corollary 3.4. Les générateurs analytiques étudiés dans [CZ76a] ont un spectre inclus dans $\mathbb{R}_+$, ou égal à $\mathbb{C}$ tout entier ([CZ76a], Theorem 3.6). Ceci est contenu dans la proposition 3.5 de cette thèse dans laquelle on ne s'intéresse pas seulement aux groupes bornés, mais aussi à tout groupe fortement continu de type strictement inférieur à π. On peut alors localiser le spectre du générateur analytique dans un secteur (s'il n'est

pas égal à $\mathbb{C}$ tout entier) et on peut donner une estimation de la résolvante dans la proposition 3.10, ce qui ne se trouve pas dans [CZ76a].
D'autre part, la proposition 3.6 est proche de [Zsi83], Theorem 2.3 : il s'agit là de relier le fait que l'ensemble résolvant du générateur analytique est non vide à la convergence d'une intégrale singulière. L'originalité de ce travail est de montrer que cette convergence a toujours lieu si on se place dans un espace qui possède la propriété UMD (Lemme 4.1).

Dans le chapitre 4, section 4.1, le corollaire 4.7 est connu comme étant le théorème de Dore-Venni ([DV87], Theorem 2.1). La démonstration proposée ici est entièrement originale et utilise les résultats des chapitres 2 et 3. La régularité maximale du problème de Cauchy résolue dans le théorème 4.9 se trouve aussi dans [DV87], Theorem 3.2.
Les résultats de la section 4.2 sont inspirés de [Zsi83], partie 4 : Computation of the spectrum, certains lemmes de cette section proviennent de [CZ76a], partie 5 : Spectral subspaces. La proposition 4.11, en revanche, repose sur la transformation de Hilbert dans les espaces UMD, et ne figure pas dans les articles cités ci-dessus. Les lemmes 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 sont des versions adaptées de résultats de [Zsi83] et [CZ76a]. La proposition 4.16, qui donne un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est à rapprocher de [Zsi83], Lemma 3.3. Les démonstrations de la proposition 4.18 et du théorème 4.19 sont simplement adaptées des résultats existant sur les espaces de Hardy classiques sur $\mathbb{R}$.

L'originalité des résultats exposés dans cette thèse vient essentiellement du lien entre les résultats de I. Ciorănescu et L. Zsidó et la propriété UMD des espaces de Banach étudiés. De plus, l'optique suivie est différente. Le but ici est de trouver des résultats nouveaux, ou améliorés, sur les opérateurs qui admettent des puissances imaginaires bornées. On remarque, en particulier, que la théorie classique mettant en œuvre des opérateurs sectoriels est contenue dans la théorie développée ici.

Deuxième partie

Le théorème de Dore-Venni dans un cadre non commutatif

Chapitre 5

Exposé de l'article

Dans ce chapitre, on donne quelques détails sur les résultats de l'article "A theorem of the Dore-Venni type for non-commuting operators" qui se trouve juste après. On ne refait pas ici toutes les démonstrations, c'est pourquoi pour chaque lemme, proposition ou théorème, on indique la référence de l'article.

5.1 Le théorème

Le théorème de Dore-Venni (voir première partie) donne un résultat de régularité maximale pour une somme d'opérateurs assez réguliers dont les résolvantes commutent. On a vu (Paragraphe 4.1.2) que ce théorème peut s'appliquer au problème de Cauchy suivant, sous réserve de régularité de l'opérateur A,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

sur $L^p(0,T;Y)$ où Y est un espace UMD et $p \in (1,\infty)$. Mais l'hypothèse de commutativité sur les résolvantes dans le théorème abstrait interdit, par exemple, les problèmes de Cauchy non autonomes. Le but de l'article "A theorem of the Dore-Venni type for non-commuting operators" qui suit est d'affaiblir cette hypothèse. Les notions que l'on utilise sont celles de la théorie exposée succinctement dans le chapitre 1. Le résultat théorique est le suivant.

Théorème 5.1 (Theorem 1). *On considère deux angles $\varphi_A, \varphi_B \in (0,\pi)$, tels que $\varphi_A + \varphi_B < \pi$, ainsi que deux réels α et β tels que $0 \le \alpha < \beta \le 1$. Soit X un espace de Banach UMD, et M_A un réel positif.*
Alors il existe une constante $c > 0$ telle que si A et B sont deux opérateurs (linéaires) de classe $BIP(X)$ vérifiant :
(i) le type θ_A du groupe $(A^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ et θ_B celui de $(B^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ sont tels que $\varphi_A > \theta_A$ et $\varphi_B > \theta_B$,
(ii) A est inversible,
(iii)

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \le \frac{M_A}{1+|\lambda|}, \qquad \textit{pour tout } \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A},$$

(iv)

$$\|A(\lambda+A)^{-1}(A^{-1}(\mu+B)^{-1}-(\mu+B)^{-1}A^{-1})\| \leq \frac{c}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}, \qquad (5.1)$$

pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ *et* $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$*,*
alors l'opérateur $(A+B, D(A)\cap D(B))$ *est fermé et inversible.*

Remarque 5.2. *Comme* A *est sectoriel et inversible, la condition (iii) est toujours vérifiée, si ce n'est que l'on impose la valeur de* M_A*. De même, comme* B *est sectoriel, il existe une constante* $M_B > 0$ *telle que* $\|\mu(\mu+B)^{-1}\| \leq M_B$ *pour tout* $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$*. On peut remarquer ici que* c *ne dépend que de* φ_A*,* φ_B*,* M_A*,* α*,* β *et* X*, ou plus précisément de la transformation de Hilbert sur* X*, comme il est montré dans la suite.*

Le but de la section 4 (Proof of the main results) de l'article qui suit est de donner la démonstration de ce théorème. Dans cette version française, nous rappelons les étapes importantes de la preuve. Il est à noter que, dans l'article, la condition (5.1) correspond à la condition (2.6).

Un point important de la démonstration que nous proposons ici est de considérer des approximations bornées et inversibles de A et B, *i.e.* $A_\delta := A(1+\delta A)^{-1}$ et $B_\delta := (B+\delta)(1+\delta B)^{-1}$ pour $\delta \in (0,1)$. Pour tout $x \in D(A)$, on a alors $\lim\limits_{\delta\to 0^+} A_\delta x = Ax$ et pour tout $x \in D(B)$, on a $\lim\limits_{\delta\to 0^+} B_\delta x = Bx$. On peut voir facilement que A_δ et B_δ sont sectoriels et vérifient $\|(\lambda+A_\delta)^{-1}\| \leq \dfrac{M'_A}{1+|\lambda|}$ pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et $\|\mu(\mu+B_\delta)^{-1}\| \leq M'_B$ pour tout $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$, pour tout $\delta \in (0,1)$, où M'_A et M'_B sont des constantes indépendantes de $\delta \in (0,1)$. D'autre part, on peut montrer, grâce au théorème de Prüss-Sohr [PS90], que A_δ et B_δ sont de la classe $BIP(X)$ pour tout $\delta \in (0,1)$; on sait de plus que θ_A est le type de $(A_\delta^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ et que θ_B est le type de $(B_\delta^{is})_{s\in\mathbb{R}}$ pour tout $\delta \in (0,1)$.
D'après la relation (5.1), A et B vérifient la relation $\|Z(\lambda,\mu)\| \leq \dfrac{c}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}$, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et pour tout $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$, où $Z(\lambda,\mu) := A(\lambda+A)^{-1}(A^{-1}(\mu+B)^{-1}-(\mu+B)^{-1}A^{-1})$.
On note $Z_\delta(\lambda,\mu) := A_\delta(\lambda+A_\delta)^{-1}(A_\delta^{-1}(\mu+B_\delta)^{-1}-(\mu+B_\delta)^{-1}A_\delta^{-1})$. On a alors le résultat suivant

Lemme 5.3 (Lemma 2)**.** *Il existe une constante* $c(\varphi_A,\varphi_B)$ *qui ne dépend que de* φ_A *et de* φ_B *telle que* $\|Z_\delta(\lambda,\mu)\| \leq \dfrac{c\ c(\varphi_A,\varphi_B)}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}$*, pour tout* $\delta \in (0,1)$*.*

La preuve de ce résultat provient de l'égalité

$$Z_\delta(\lambda,\mu) = \frac{1-\delta^2}{(1+\delta\lambda)(1+\delta\mu)^2}\, Z\left(\frac{\lambda}{1+\delta\lambda}, \frac{\delta+\mu}{1+\delta\mu}\right).$$

On pose, pour $\delta \in (0,1)$ et pour $\gamma \in (0,1)$ arbitraire,

$$S_\delta := \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} A_\delta^{-z}B_\delta^{z-1}\,\frac{dz}{\sin \pi z} \qquad \text{et} \qquad T_\delta := \frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} B_\delta^{-z}A_\delta^{z-1}\,\frac{dz}{\sin \pi z}.$$

On peut voir, grâce aux estimations que vérifient A_δ et B_δ, que ces deux intégrales sont absolument convergentes. De plus, comme $z \mapsto A_\delta^{-z}B_\delta^{z-1}$ et $z \mapsto B_\delta^{-z}A_\delta^{z-1}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, on a, d'après le théorème des résidus, $A_\delta S_\delta x + S_\delta B_\delta x = x$ et $T_\delta A_\delta x + B_\delta T_\delta x = x$, pour tout $x \in X$ et pour tout $\delta \in (0,1)$.
On représente maintenant les opérateurs S_δ et T_δ à l'aide d'intégrales sur un contour bien choisi. Dans ce but, on considère deux angles $\theta < \varphi_B$ et $\phi < \varphi_A$ et un réel $\delta_0 \in (0,1)$ tels que

$$\bigcup_{0<\delta<\delta_0} \sigma(B_\delta) \cup \sigma(B) \subset \Sigma_\theta \quad \text{et} \quad \bigcup_{0<\delta<\delta_0} \sigma(A_\delta) \cup \sigma(A) \subset \Sigma_\phi.$$

Soit $\delta \in (0,\delta_0)$ fixé. On considère alors les contours Γ_B^δ et Γ_A^δ définis dans l'article et on obtient, par le calcul fonctionnel de Dunford, les égalités suivantes, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$B_\delta^{z-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_B^\delta} \mu^{z-1}(\mu - B)^{-1}d\mu \quad \text{et} \quad A_\delta^{-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_A^\delta} \lambda^{-z}(\lambda - A)^{-1}d\lambda.$$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a la représentation suivante pour S_δ

$$S_\delta = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_B^\delta}\int_{\Gamma_A^\delta}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-z}\mu^{z-1}\,\frac{dz}{\sin \pi z}\right)(\lambda - A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}\,d\lambda\,d\mu.$$

D'après le choix de Γ_B^δ et Γ_A^δ, on sait que pour tout $\lambda \in \Gamma_A^\delta$ et pour tout $\mu \in \Gamma_B^\delta$, on a $|\arg\lambda| + |\arg\mu| \le \phi + \theta < \pi$. On peut alors utiliser la transformation de Mellin pour calculer la quantité entre parenthèses

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \lambda^{-z}\mu^{z-1}\,\frac{dz}{\sin \pi z} = \frac{1}{\lambda+\mu}.$$

De plus, le calcul fonctionnel de Dunford donne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_A^\delta}\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda - A)^{-1}d\lambda = (\mu + A_\delta)^{-1}.$$

Ainsi, on obtient

$$S_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_B^\delta}(\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}d\mu.$$

On peut alors déformer le contour Γ_B^δ en $\Gamma := (+\infty, 0]e^{i\theta} \cup [0,+\infty)e^{-i\theta}$ et par holomorphie, on obtient, grâce aux estimations que vérifient les résolvantes de A_δ et B_δ,

$$S_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}d\mu, \qquad \text{pour tout} \ \ \delta \in (0,\delta_0).$$

De la même manière, on montre que

$$T_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (\mu - B_\delta)^{-1}(\mu + A_\delta)^{-1} d\mu, \qquad \text{pour tout } \ \delta \in (0, \delta_0),$$

avec le même contour Γ.
Lorsque $\delta \to 0^+$, $(\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}$ converge fortement vers $(\mu + A)^{-1}(\mu - B)^{-1}$ pour tout $\mu \in \Gamma$ et $\mu \mapsto (\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}x$ est intégrable sur Γ pour tout $x \in X$, uniformément en $\delta \in (0, \delta_0)$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{\delta \to 0^+} S_\delta x = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (\mu + A)^{-1}(\mu - B)^{-1}x \; d\mu =: Sx \qquad \text{pour tout } \ x \in X.$$

De même,

$$\lim_{\delta \to 0^+} T_\delta x = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (\mu - B)^{-1}(\mu + A)^{-1}x \; d\mu =: Tx \qquad \text{pour tout } \ x \in X.$$

Concernant ces opérateurs, on a le résultat suivant

Lemme 5.4 (Lemma 3)**.** *L'opérateur S est borné sur X, $R(S) \subset D(A)$, AS est un opérateur borné sur X et $ASx + SBx = x$ pour tout $X \in D(B)$; ainsi, SB admet une unique extension bornée sur X tout entier.*

On construit alors l'opérateur $Q := AS - A^2SA^{-1}$.

Lemme 5.5 (Lemma 4)**.** *L'opérateur Q est borné sur X et $\|Q\| < 1$ si la constante c dans (5.1) est assez petite.*

On peut alors déterminer un inverse à gauche L pour $A + B$

Proposition 5.6 (Proposition 2)**.** *L'opérateur $L := A^{-1}(1 + Q)^{-1}AS$ est borné sur X et vérifie $L(Ax + Bx) = x$ pour tout $x \in D(A) \cap D(B)$. De plus, $R(L) \subset D(A)$.*

D'une manière similaire, on construit un inverse à droite pour $A + B$.

Lemme 5.7 (Lemma 5)**.** *On définit l'opérateur TA sur $D(A)$. Cet opérateur admet une unique extension bornée sur X tout entier notée $\overline{TA}$. De plus, $R(T) \subset D(B)$ et BT est borné sur X.*

On peut remarquer d'autre part que $\|A^\gamma(\lambda + A)^{-1}\| \leq \dfrac{1 + M_A}{(1 + |\lambda|)^{1-\gamma}}$, pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A}$ et pour tout $\gamma \in [0, 1]$. En effet, l'application $z \mapsto A^z(\lambda + A)^{-1}x$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour tout $x \in X$. On peut alors lui appliquer le théorème des trois lignes d'Hadamard ([RS75], Appendix to IX.4 : Abstract interpolation) et on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) \in [0, 1]$ et pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|A^z(\lambda + A)^{-1}x\| &\leq \|(\lambda + A)^{-1}x\|^{\Re(z)} \|A(\lambda + A)^{-1}x\|^{1-\Re(z)} \\ &\leq \frac{(1 + M_A)^{1-\Re(z)} M_A^{\Re(z)}}{(1 + |\lambda|)^{1-\Re(z)}}. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 5.8 (Lemma 6). *Pour tout $\gamma \in (\alpha, \beta)$, l'opérateur $P = A^{-\gamma}(TA - AT)A^{\gamma}$ est borné sur X et $\|P\| < 1$ si la constante c qui intervient dans (5.1) est assez petite.*

On a maintenant tout le matériel pour obtenir le résultat annoncé dans le théorème. On fixe un réel γ dans (α, β) et on suppose que la constante c dans (5.1) est assez petite suivant le lemme et la proposition qui précèdent.

Proposition 5.9 (Proposition 3). *L'opérateur $R := \overline{TA}A^{\gamma-1}(1-P)^{-1}A^{-\gamma}$ est un opérateur borné sur X, $R(R) \subset D(A) \cap D(B)$ et $(A+B)Rx = x$ pour tout $x \in X$. De plus, $R = L$ est l'inverse de $A + B$.*

A propos de l'estimation (5.1), quelques remarques. On note $C(\lambda, \mu)$ le commutateur des résolvantes de A et B, *i.e.* $C(\lambda, \mu) = (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et tout $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$. Dans le cas d'opérateurs A et B sectoriels quelconques, A inversible, on a toujours

$$\|C(\lambda, \mu)\| \leq \frac{2M_A M_B}{|\mu|(1 + |\lambda|)},$$

et dans le cas où les résolvantes de A et B commutent (c'est le cas pour le théorème de Dore-Venni classique), on a $C(\lambda, \mu) = 0$. De plus,par un calcul simple, on a $C(\lambda, \mu) = Z(\lambda, \mu)A(\lambda + A)^{-1}$. L'estimation (5.1) implique donc une estimation du type

$$\|C(\lambda, \mu)\| \leq \frac{c\ (1 + M_A)}{|\mu|^q(1 + |\lambda|^p)},$$

avec $p \in (0, 1]$, $q \in (1, 2]$ et $p + q = 1 - \alpha + 1 + \beta = 2 + \beta - \alpha > 2$.

Nous pouvons aussi remarquer que l'on peut ajouter une constante $\nu \geq 0$ à l'opérateur B sans changer les estimations que vérifient sa résolvante et ses puissances imaginaires. Dans ce cas, l'estimation (5.1) vérifiée par le commutateur des résolvantes de A et B décroît lorsque ν tend vers l'infini. En effet, pour tout $\nu \geq 0$, on a

$$\|A(\lambda + A)^{-1}(A^{-1}(\mu + \nu + B)^{-1} - (\mu + \nu + B)^{-1}A^{-1})\| \leq \frac{c}{(1 + |\lambda|^{1-\alpha})|\nu + \mu|^{1+\beta}},$$

pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$. Ainsi, pour $\beta' \in (\alpha, \beta)$, on a

$$\frac{c}{|\nu + \mu|^{1+\beta}} \leq \frac{c}{|\nu|^{\beta-\beta'}} \frac{1}{|\mu|^{1+\beta'}},$$

pour tout $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$. On peut alors énoncer le résultat suivant qui apparaît comme un corollaire du théorème 5.1.

Corollaire 5.10 (Corollary 2). *Sous les conditions du théorème 5.1, avec $c > 0$ une constante quelconque dans l'estimation (5.1), l'opérateur $A + B + \nu$ de domaine $D(A) \cap D(B)$ est fermé et inversible dès que $\nu > 0$ est assez grand.*

5.2 Le problème de Cauchy non autonome

Le but ici est d'appliquer le théorème précédent, au problème de Cauchy non autonome suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + L(t)u(t) = f(t), \quad \text{pour } \ t \in [0,T], \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

sur l'espace $X := L^p(0,T;Y)$ où $p \in (1,\infty)$ et Y est un espace de Banach UMD et où $(L(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille d'opérateurs sectoriels sur Y telle que $t \mapsto (1+L(t))^{-1}$ est fortement mesurable de $[0,T]$ dans Y.
On définit alors les opérateurs A et B de la manière suivante

$$\begin{cases} (Au)(t) := L(t)u(t), \quad t \in [0,T] \\ D(A) := \{x \in X \ ; \ u(t) \in D(L(t)), \quad t \in [0,T], \ Au \in X\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (Bu)(t) := \dfrac{du}{dt}(t), \quad t \in [0,T] \\ D(B) := \{u \in W^{1,p}(0,T;Y) \ ; \ u(0) = 0\} \end{cases}$$

L'opérateur B a été étudié dans le paragraphe 4.1.2. Rappelons que cet opérateur est sectoriel, inversible, admet des puissances imaginaires bornées sur X et vérifie

$$\|B^{is}\| \leq C_p(Y)(1+s^2)e^{\frac{\pi}{2}|s|}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

De plus, on peut remarquer que pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\Re(\mu) > 0$, on a

$$\left((\mu + B)^{-1}f\right)(t) = \int_0^t e^{-\mu(t-s)}f(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

On suppose alors que pour tout $t \in [0,T]$, $L(t) \in BIP(Y)$ et qu'il existe des constantes M_A, $K_A > 0$, $\varphi_A \in (0, \frac{\pi}{2})$ telles que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|(\lambda + L(t))^{-1}\| \leq \frac{M_A}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A} \qquad \text{et} \qquad \|L(t)^{is}\| \leq K_A e^{\varphi_A|s|}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Cette condition est notée **(L)** dans l'article qui suit. Alors pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$ et pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$, on a

$$\left((\lambda + A)^{-1}f\right)(t) = (\lambda + L(t))^{-1}f(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

En effet, pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$ et pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$, on a, par définition, $(\lambda+L(t))^{-1}f(t) \in D(L(t))$ pour tout $t \in [0,T]$. De plus, $\left(t \mapsto (\lambda + L(t))^{-1}f(t)\right) \in X$ d'après la première inégalité de la condition **(L)**, et d'après la définition de l'opérateur A, $(\lambda + A)\left(t \mapsto (\lambda + L(t))^{-1}f(t)\right) = f$. Ainsi, A est sectoriel sur X et vérifie

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}.$$

D'autre part, les puissances imaginaires de A étant définies à partir des résolvantes de A, on a de même pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\left(A^{is}f\right)(t) = L(t)^{is}f(t), \quad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

On peut maintenant énoncer un théorème abstrait qui donne un résultat de régularité maximale pour le problème de Cauchy non autonome.

Théorème 5.11. *Soit Y un espace de Banach UMD, et soit $p \in (1,\infty)$. On note $X := L^p(0,T;Y)$. On suppose que $(L(t))_{t\in[0,T]}$ est une famille mesurable d'opérateurs sectoriels sur Y qui vérifie la condition* **(L)**. *On suppose de plus qu'il existe des constantes $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,1]$ et $M_1 > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et pour tout $t,s \in [0,T]$, on a*

$$\|L(t)(\lambda + L(t))^{-1}(L(t)^{-1} - L(s)^{-1})\| \leq \frac{M_1|t-s|^\beta}{1+|\lambda|^{1-\alpha}}.$$

Alors pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, le problème

$$(nCP) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + L(t)u(t) = f(t), & \textit{pour } \ t \in [0,T], \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in W^{1,p}(0,T;Y) \cap L^p(0,T;D(A))$, où $D(A)$ est le domaine de l'opérateur A défini plus haut.

Démonstration. On veut appliquer ici le théorème 5.1, ou plutôt son corollaire 5.9. Il faut encore vérifier que les opérateurs que l'on considère vérifient la condition (5.1).

• Dans un premier temps, remarquons que, si on pose $v(t) = e^{-\nu t}u(t)$, $t \in [0,T]$, pour un réel ν quelconque, le problème (nCP) devient

$$(nCP)_\nu \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + L(t)v(t) + \nu v(t) = g(t), & \text{pour } t \in [0,T], \\ v(0) = 0, \end{cases}$$

où $g(t) := e^{-\nu t}f(t)$, $t \in [0,T]$. Ainsi, résoudre le problème de régularité maximale pour (nCP) sur $L^p(0,T;Y)$ est équivalent à résoudre le problème de régularité maximale pour $(nCP)_\nu$ sur $L^p(0,T;Y)$ pour un $\nu \in \mathbb{R}$.

• On considère maintenant les deux opérateurs A et B associés au problème (nCP) comme ils ont été définis au début de cette section 5.2. Soit $\varphi_B \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \varphi_A)$. On note

$$Z(\lambda,\mu) := A(\lambda + A)^{-1}(A^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}A^{-1}),$$

pour $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ et $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$. On a alors, pour tout $f \in L^p(0,T;Y)$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} (Z(\lambda,\mu)f)(t) &= L(t)(\lambda + L(t))^{-1}\left(\int_0^t e^{-\mu(t-s)}L(t)^{-1}f(s)\,ds \right. - \\ &\qquad\qquad \left. \int_0^t e^{-\mu(t-s)}L(s)^{-1}f(s)\,ds\right) \\ &= L(t)(\lambda + L(t))^{-1}\int_0^t e^{-\mu(t-s)}\left(L(t)^{-1} - L(s)^{-1}\right)f(s)\,ds. \end{aligned}$$

On a ainsi l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\|Z(\lambda,\mu)f\|_p &\leq \frac{M_1}{1+|\lambda|^{1-\alpha}}\left(\int_0^T e^{-\mu t}t^\beta dt\right)\|f\|_p\\ &\leq \frac{M_1\Gamma(1+\beta)}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}\|f\|_p.\end{aligned}$$

• On peut alors appliquer le corollaire 5.9 aux opérateurs A et B. Le problème de régularité maximale est donc résolu pour $(nCP)_\nu$, pour $\nu > 0$ assez grand. D'après le premier point, ceci donne le résultat cherché. □

Exemple 5.12. *On propose ici un exemple d'opérateur A qui vérifie toutes ces hypothèses.*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère Γ_0 et Γ_1 deux ouverts et fermés de $\partial\Omega$ vérifiant $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ et $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. On note $n(x)$ la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$. Soit b une application continue de $[0,T] \times \overline{\Omega}$ à valeurs dans $Sym(N)$, les matrices symétriques d'ordre N, telle que $t \mapsto b(t,x)$ et $t \mapsto b_{x_j}(t,x)$, $j \in \{1,...,N\}$ appartiennent à $\mathcal{C}^\delta([0,T])$ uniformément en $x \in \Omega$, pour un $\delta > \frac{1}{2}$. On considère l'opérateur A défini, comme précédemment, par les opérateurs $L(t)$, $t \in [0,T]$ suivants

$$\left\{\begin{array}{l}(L(t)u)(x) = -\mathrm{div}(b(t,x)\nabla u(x)),\ t\in[0,T],\ x\in\Omega,\\ D(L(t)) = \{u \in W^{2,q}(\Omega)\ ;\ u(x)=0 \text{ pour } x\in\Gamma_0 \text{ et}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad n(x)b(t,x)\nabla u(x) = 0 \text{ pour } x\in\Gamma_1\}\end{array}\right.$$

Le problème est maintenant de montrer que ces opérateurs vérifient effectivement les hypothèses du théorème 5.10. Ceci concerne la section 6 de l'article. On a ainsi le résultat suivant

Théorème 5.13 (Theorem 3)**.** *On considère Ω, Γ_1 et $\Gamma_0 \neq \emptyset$, b comme précédemment. Soit $p,q \in (1,\infty)$. Alors pour tout $f \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$, le problème*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{du}{dt}(t,x) = div(b(t,x)\nabla u(t,x)) - f(t,x), \quad t\in[0,T],\ x\in\Omega,\\ n(x).(b(t,x)\nabla u(t,x)) = 0, \quad t\in[0,T],\ x\in\Gamma_1,\\ u(t,x) = 0, \quad t\in[0,T],\ x\in\Gamma_0,\\ u(0,x) = 0, \quad x\in\Omega.\end{array}\right.$$

admet une unique solution $u \in L^p(0,T;W^{2,q}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$.

5.3 Equations d'évolution plus générales

On s'intéresse maintenant à des équations du type

$$u(t) + \int_0^t a(t-s)(\nu u(s) + L(s)u(s) - f(s))ds = 0, \quad t \geq 0.$$

Le cas $a = 1$ correspond au problème de Cauchy non autonome que l'on a traité dans la section précédente ; en effet, il suffit pour le voir de dériver l'équation par rapport à t. On suppose que la famille d'opérateurs $(L(t))_{t\geq 0}$ est mesurable et vérifie les hypothèses suivantes. Pour tout $t \geq 0$, $L(t) \in BIP(Y)$ et il existe des constantes M_A, $K_A > 0$, $\varphi_A \in (0, \pi)$ telles que pour tout $t \geq 0$,

$$\|(\lambda + L(t))^{-1}\| \leq \frac{M_A}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A} \qquad \text{et} \qquad \|L(t)^{is}\| \leq K_A e^{\varphi_A |s|}, \quad s \in \mathbb{R},$$

comme dans la section précédente. De plus, on suppose qu'il existe des constantes $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$ et $M_1 > 0$ telles que

$$\|L(t)(\lambda + L(t))^{-1}(L(t)^{-1} - L(s)^{-1})\| \leq \frac{M_1 |t-s|^\delta}{1+|\lambda|^{1-\alpha}}, \quad t, s \geq 0.$$

On définit alors l'opérateur A de la manière suivante

$$\begin{cases} (Au)(t) := L(t)u(t), \quad t \geq 0 \\ D(A) := \{x \in X \ ; \ u(t) \in D(L(t)), \quad t \geq 0, \ Au \in X\} \end{cases}$$

Occupons-nous maintenant de définir l'opérateur B. On suppose que le noyau $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ vérifie $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a(t)| e^{-\varepsilon t}\, dt < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Formellement, si on note $\tilde{f}$ la transformée de Laplace d'une fonction f, *i.e.* $\tilde{f}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\, dt$, on a $\widetilde{Bu}(\lambda) := \dfrac{\tilde{u}(\lambda)}{\tilde{a}(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, où $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \Re(z) > 0\}$. Afin que cet opérateur B vérifie les bonnes hypothèses, on suppose que le noyau a vérifie les estimations suivantes

$$|\arg(\tilde{a}(\lambda))| \leq \vartheta_B \quad \text{et} \quad \left|\frac{\lambda \tilde{a}'(\lambda)}{\tilde{a}(\lambda)}\right| \leq \kappa, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}_+,$$

où $\vartheta_B \in (0, \pi)$ et $\kappa > 0$ sont deux constantes indépendantes de $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Ces estimations sont notées **(a)** dans l'article qui suit. Ainsi, l'opérateur B est sectoriel et admet des puissances imaginaires bornées (on pourra se reporter à [Prü93] I.8.4). La résolvante de B est donnée par

$$((\mu + B)^{-1} f)(t) = \int_0^t r_\mu(t-s) f(s)\, ds \quad \text{pour tout } t \geq 0, \ f \in L^p(\mathbb{R}_+; Y),$$

où r_μ désigne la solution de l'équation de Volterra scalaire, *i.e.*

$$r_\mu(t) + \mu \int_0^t a(t-s) r_\mu(s)\, ds = a(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

pour tout $\mu \in \Sigma_{\pi - \varphi_B}$, où $\varphi_B > \vartheta_B$. De cette manière, l'opérateur $Z(\lambda, \mu)$ qui intervient dans la condition (5.1) du théorème 5.1 s'écrit

$$(Z(\lambda,\mu)f)(t) = \int_0^t r_\mu(t-s) L(t)(\lambda + L(t))^{-1}(L(t)^{-1} - L(s)^{-1}) f(s)\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Compte tenu de l'estimation que vérifient les opérateurs $(L(t))_{t\geq 0}$, il est "naturel" de considérer une estimation du type

$$\int_0^{+\infty} t^\delta |r_\mu(t)|\ dt \leq \frac{M_2}{|\mu|^{1+\beta}}, \quad \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$$

où δ est la constante qui intervient dans l'estimation que vérifient les opérateurs $(L(t))_{t\geq 0}$, et où $M_2 > 0$ et $\beta \in (\alpha, 1)$ sont des constantes, indépendantes de μ. Cette estimation est notée **(r)** dans l'article qui suit.
Dans ce cas, il est facile de vérifier que nous nous trouvons dans les hypothèses du théorème 5.1 et de son corollaire.
Dans la suite, nous donnons des exemples de noyaux a qui vérifient toutes ces conditions, autres que le cas $a = 1$ qui correspond au problème de Cauchy non autonome traité dans la section précédente.

Exemple 5.14. *Le premier type de noyaux que nous traitons dans l'article correspond à* $a(t) := \dfrac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$, $t > 0$ *et* $\gamma \in (0, 2)$.

Dans le cas d'un tel noyau, la transformée de Laplace de a est donnée par $\tilde{a}(\lambda) = \lambda^{-\gamma}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Suivant les raisonnements du **1)** de la section 5 de l'article, on a le résultat suivant

Proposition 5.15 (Proposition 4)**.** *Avec les notations précédentes, pour tout* $\delta > -1$, *on a* $\vartheta_B = \pi\left(1 - \dfrac{\gamma}{2}\right)$ *et* $\beta = \dfrac{\delta}{\gamma}$, *et on peut choisir n'importe quel* $\varphi_B > \vartheta_B$.

Exemple 5.16. *On considère maintenant des noyaux a qui sont des fonctions complètement positives.*

Définition 5.17. *Une fonction a est dite* **complètement positive** *si* $\Phi := \dfrac{1}{\tilde{a}}$ *est une fonction de Bernstein, i.e.* $\Phi(\lambda) > 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *et* Φ' *complètement monotone sur* $(0, \infty)$ *(*Φ' *représentée par la transformée de Laplace d'une mesure positive).*

On suppose de plus que $\Phi_1 := -\dfrac{\tilde{a}'(0^+)}{\tilde{a}(0^+)^2} < \infty$. Cet exemple correspond au cas **2)** de la section 5 de l'article qui suit où on peut trouver tous les détails qui conduisent au résultat suivant

Proposition 5.18 (Proposition 5)**.** *Sous les hypothèses précédentes, la condition* **(r)** *est vérifiée pour* $\beta = \delta$, *pour tout* $\varphi_B > \frac{\pi}{2}$ *et* $\delta \in (0, 1)$.

Exemple 5.19. *Le dernier exemple concerne des noyaux du type* $a(t) := a_0 + a_\infty t + \displaystyle\int_0^t a_1(s)\ ds$, *pour tout* $t > 0$.

Il s'agit du cas **3)** de la section 5 de l'article. On suppose que $a_0 \geq 0$, $a_\infty = 0$, a_1 est positive, décroissante, convexe et $-a_1'$ est convexe, telle que $\lim_{t\to\infty} a_1(t) = 0$. On suppose de plus que

$$\limsup_{t\to 0,\infty} \frac{\frac{1}{t}\int_0^t sa_1(s)ds}{a_0 + \int_0^t -a_1'(s)ds} < \infty \ ;$$

cette condition est notée (5.12) dans l'article. Alors, on montre

Proposition 5.20 (Proposition 6)**.** *Il existe un angle $\vartheta_B < \pi$ tel que pour tout $\varphi_B < \vartheta_B$, il existe une constante cst qui ne dépend que de φ_B telle que*

$$\int_0^\infty t^\delta |r_\mu(t)| \ dt \leq \frac{cst}{|\mu|^{1+\frac{\delta}{\rho_0}}}, \qquad \textit{pour tout } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},$$

pour tout $\delta \in (0,1)$ et où $\rho_0 = \dfrac{2\vartheta_B}{\pi}$.

Remarquons que pour chaque type de noyaux précédent, on peut résoudre le problème de régularité maximale pour

$$\begin{cases} u(t,x) + \displaystyle\int_0^t a(t-s)(\nu u(s,x) - \operatorname{div}(b(s,x)\nabla u(s,x)) - f(s,x)) \ ds = 0, \\ \hfill t \geq 0, \ x \in \Omega, \\ n(x).(b(t,x)\nabla u(t,x)) = 0, \quad t \geq 0, \ x \in \Gamma_1, \\ u(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \ x \in \Gamma_0, \end{cases}$$

où les notations, ainsi que les hypothèses, sont les mêmes que dans l'exemple 1.10 ; voir Theorem 3.

Chapitre 6

A theorem of the Dore-Venni type for non-commuting operators

TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 349, Number 12, December 1997, Pages 4787–4814
S 0002-9947(97)01997-1

A THEOREM OF THE DORE-VENNI TYPE FOR NONCOMMUTING OPERATORS

SYLVIE MONNIAUX AND JAN PRÜSS

ABSTRACT. A theorem of the Dore-Venni type for the sum of two closed linear operators is proved, where the operators are noncommuting but instead satisfy a certain commutator condition. This result is then applied to obtain optimal regularity results for parabolic evolution equations $\dot{u}(t) + L(t)u(t) = f(t)$ and evolutionary integral equations $u(t) + \int_0^t a(t-s)L(s)u(s)ds = g(t)$ which are nonautonomous. The domains of the involved operators $L(t)$ may depend on t, but $L(t)^{-1}$ is required to satisfy a certain smoothness property. The results are then applied to parabolic partial differential and integro-differential equations.

1. Introduction

Let X be a Banach space with norm $|\cdot|$, and let A be a closed linear operator in X with dense domain $D(A)$; as usual, $N(A)$, $R(A)$, $\rho(A)$, $\sigma(A)$ denote kernel, range, spectrum, resolvent set of A, respectively. A is called *sectorial* if $N(A) = \{0\}$, $R(A)$ is dense in X, $\rho(A) \supset (-\infty, 0)$, and $M_0 := \sup_{r>0} r|(r+A)^{-1}| < \infty$. The class of sectorial operators will be denoted by $S(X)$. If A is sectorial it follows easily that $\rho(-A)$ contains a nonempty open sector $\Sigma_\phi := \{z \in \mathbf{C} : z \neq 0, |\arg z| < \phi\}$. Therefore, for such operators it makes sense to define the *spectral angle* ϕ_A of A by means of

$$\phi_A := \inf\{\phi > 0 : \rho(A) \supset -\Sigma_{\pi-\phi}, M_{\pi-\phi} < \infty\}, \tag{1.1}$$

where $M_\phi := \sup\{|\lambda(\lambda+A)^{-1}| : \lambda \in \Sigma_\phi\}$. Obviously,

$$\pi > \phi_A \geq \arg(\sigma(A)) := \sup\{|\arg \lambda| : \lambda \neq 0, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Now given two sectorial operators A and B which are *commuting* in the sense that

(1.2)
$$(\lambda+A)^{-1}(\mu+B)^{-1} = (\mu+B)^{-1}(\lambda+A)^{-1}, \quad \text{for all } \lambda \in \rho(-A),\ \mu \in \rho(-B),$$

about 20 years ago, Da Prato and Grisvard [8] proved that the sum $A+B$ with (natural) domain $D(A+B) := D(A) \cap D(B)$ is densely defined, closable, and its closure L is again sectorial with $\phi_L \leq \max\{\phi_A, \phi_B\}$, provided the *parabolicity* assumption $\phi_A + \phi_B < \pi$ is satisfied.

Received by the editors May 22, 1995.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A60, 47B47, 47G20, 47D06; Secondary 45A05, 45D05, 45K05.
Key words and phrases. Sum of linear operators, bounded imaginary powers of linear operators, commutator conditions, parabolic evolution equations, parabolic evolutionary integral equations, completely positive kernels, fractional derivatives, creep functions, viscoelasticity.

The natural question arising in this context is whether $A+B$ is already closed, i.e. $L = A+B$. Da Prato and Grisvard [8] were able to show the latter in certain special cases when X is a Hilbert space, but in general $A+B$ need not be closed, as was pointed out by Baillon and Clément [3]. A positive answer was given by Dore and Venni [9], even for non-Hilbert spaces.

To describe their result, observe that for the class of sectorial operators one can define complex powers by means of the standard Dunford integral; these will be closed linear and densely defined, but unbounded in general. A sectorial operator A is said to admit *bounded imaginary powers* if the purely imaginary powers A^{is} of A are uniformly bounded for $s \in [-1,1]$. It then can be shown that A^{is} forms a strongly continuous C_0-group of bounded linear operators. The class of such A will be denoted by $BIP(X)$. The type θ_A of the C_0-group A^{is} is called the *power angle* of A, i.e. $\theta_A := \lim_{|s|\to\infty} |s|^{-1}\log|A^{is}|$. The inequality $\theta_A \geq \phi_A$ has been proved in Prüss and Sohr [17].

Assuming that the Banach space X is of class $\mathcal{HT}$ (see Section 2), that A and B are commuting and admit bounded imaginary powers, and that the *strong parabolicity* condition $\theta_A + \theta_B < \pi$ is satisfied, the Dore-Venni theorem in the extended version obtained by Prüss and Sohr [17] states that $A+B$ is closed, sectorial, admits bounded imaginary powers, and $\theta_{A+B} \leq \max\{\theta_A, \theta_B\}$.

Both, the Da Prato-Grisvard theorem and the Dore-Venni theorem have important applications to evolution equations and to evolutionary integral equations, as has been shown in many articles. By means of these results maximal regularity properties of such problems can be proved, which are of interest not only in the linear theory but in particular for nonlinear problems.

However, the commutativity assumption appears to be fairly restrictive. Consider for example an evolution equation of the form

$$\dot{u}(t) + L(t)u(t) = f(t), \quad t \geq 0, \qquad u(0) = 0, \tag{1.3}$$

in a Banach space X, where $L(t)$ is a family of sectorial but generally unbounded operators in X. The commutativity assumption then requires the family $L(t)$ to be independent of t. Therefore it is very desirable to weaken this condition. For the Da Prato-Grisvard theorem it is well known how to do this. Already Da Prato and Grisvard [8] themselves presented a condition on the commutator of B and $(\lambda + A)^{-1}$ such that their result still holds, and later their condition was replaced by a different, more flexible one by Labbas and Terreni [14]; see also Fuhrmann [13]. For the Dore-Venni theorem such extensions are still missing, at present.

It is the purpose of this paper to close this gap. Our main result shows that the Dore-Venni theorem remains valid in case A and B do not commute but are subject to a commutator condition of the Labbas and Terreni type. The proof is based on the techniques developed by Dore and Venni [9] and by Prüss and Sohr [17], combined with new estimates resulting from the Labbas-Terreni condition involving the complex powers of A and B.

Our main result yields new maximal regularity results, for evolution equations as well as for evolutionary integral equations of the form

$$u(t) + \int_0^t a(t-s)(L(s)u(s) - f(s))\, ds = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

where $a(t)$ is a scalar kernel and $L(t)$ is as before. For the case of parabolic evolution equations (1.3) this is a straightforward extension of the work of Acquistapace and

Terreni [2]; therefore the presentation is kept concise at that point, here. On the other hand, for the evolutionary integral equation (1.4) the application of the main result is not obvious; it involves new L^1-estimates for the solutions of linear scalar Volterra equations depending on a parameter.

The plan for this paper is as follows. In Section 2 the main results about the sum $A+B$ of two closed linear operators are stated and discussed, while the proofs are given in Section 4. Section 3 is devoted to the application of Theorem 1 and its corollaries to evolution equations (1.3) and evolutionary integral equations (1.4). Here emphasis is put on the interpretation of the commutator condition. The L^1-estimates for the resolvent kernel associated with $a(t)$ which are needed for the commutator condition are derived in Section 5. The paper concludes with applications to parabolic partial differential and integro-differential equations which are presented in Section 6.

2. The Main Results

Recall that a Banach space X is said to belong to the class $\mathcal{HT}$ if the Hilbert transform H defined by

$$(Hf)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|s|\geq\varepsilon} f(t-s)\, \frac{ds}{\pi s}, \quad t\in \mathbf{R},\ f\in C_0^\infty(\mathbf{R};X), \tag{2.1}$$

extends to a bounded linear operator on $L^p(\mathbf{R};X)$ for some $p\in(1,\infty)$. It is well-known that the class $\mathcal{HT}$ coincides with the class of Banach spaces having the *uniform martingale difference property* (UMD-spaces), and that for such spaces the Hilbert transform is bounded on $L^p(\mathbf{R};X)$ for every $p\in(1,\infty)$. In particular, Hilbert spaces belong to $\mathcal{HT}$, and if $Y\in\mathcal{HT}$ and (Ω,μ) is a σ-finite measure space, then $L^p(\Omega,\mu;Y)$ belongs to $\mathcal{HT}$ for each $p\in(1,\infty)$. For a reference and further discussions we recommend the paper by Dore and Venni [9], the survey article Burkholder [6], and the monograph Prüss [16].

Consider now two closed linear densely defined operators A and B which are sectorial, admit bounded imaginary powers, and are subject to the strong parabolicity assumption $\theta_A+\theta_B<\pi$. Fix angles $\varphi_A>\theta_A$, $\varphi_B>\theta_B$, with

$$\varphi_A+\varphi_B<\pi. \tag{2.2}$$

Then there are constants K_A, K_B, such that

$$|A^{is}|\leq K_A e^{|s|\varphi_A}, \quad |B^{is}|\leq K_B e^{|s|\varphi_B}, \quad \text{for all } s\in\mathbf{R}. \tag{2.3}$$

Moreover, there is a constant M_B such that

$$|(\mu+B)^{-1}|\leq M_B/|\mu|, \quad \text{for all } \mu\in\Sigma_{\pi-\varphi_B}. \tag{2.4}$$

A similar estimate is also valid for the resolvent of A, but if we assume in addition that A is invertible, we have the stronger estimate

$$|(\lambda+A)^{-1}|\leq M_A/(1+|\lambda|), \quad \text{for all } \lambda\in\Sigma_{\pi-\varphi_A}, \tag{2.5}$$

for some constant M_A. The commutator condition which will be employed here reads as follows. We assume that there are constants $0\leq\alpha<\beta\leq 1$ and $c\geq 0$ such that

$$|A(\lambda+A)^{-1}[A^{-1}(\mu+B)^{-1}-(\mu+B)^{-1}A^{-1}]|\leq \frac{c}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}, \quad \text{for all } \lambda\in\Sigma_{\pi-\varphi_A},\ \mu\in\Sigma_{\pi-\varphi_B}. \tag{2.6}$$

We are now in position to state our main result.

Theorem 1. *Suppose X is a Banach space of class $\mathcal{HT}$, A and B are closed, linear, densely defined operators in X which are sectorial and admit bounded imaginary powers, and let A be invertible. Assume the strong parabolicity condition $\theta_A+\theta_B<\pi$, and fix angles $\varphi_A>\theta_A$, $\varphi_B>\theta_B$, such that $\varphi_A+\varphi_B<\pi$ holds.*

Then there is a constant $c_0>0$ such that the operator $A+B$ with domain $D(A)\cap D(B)$ is closed and invertible in X, provided A and B satisfy the commutator condition (2.6)*and $c<c_0$.*

The idea of the proof is based on the formulas

$$S:=\frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}A^{-z}B^{z-1}\frac{dz}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu+A)^{-1}(\mu-B)^{-1}d\mu,$$

and

$$T:=\frac{1}{2i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}B^{-z}A^{z-1}\frac{dz}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu-B)^{-1}(\mu+A)^{-1}d\mu,$$

where $\gamma\in(0,1)$ is arbitrary, and the contour Γ is chosen appropriately. One can then prove the identities

$$ASx+SBx=x\quad\text{ for all } x\in D(B),$$

and

$$TAx+BTx=x\quad\text{ for all } x\in D(A).$$

Therefore, AS and SB are bounded or unbounded simultaneously, and the same is true for TA and BT. The commutator condition (2.6) implies that $SB-BT$ is bounded; hence the operators AS, SB, TA, BT are bounded or unbounded simultaneously. By means of the boundedness of the Hilbert transform in $L^2(\mathbf{R};X)$ and with the aid of (2.6) one then can show that all these quantities are bounded. This is the crucial step of the proof. Once this is done, one can construct left and right inverses L and R by means of the commutator condition (2.6) as

$$L:=A^{-1}(I+Q)^{-1}AS,\quad R:=TA^{\gamma}(I+P)^{-1}A^{-\gamma},$$

where P and Q are small in operator norm; it is here where the smallness of c comes in. Finally, $R=L$ is an inverse, and since by construction AL is bounded, BL is bounded as well.

From the estimates derived in the proof in Section 4 it will become apparent that in the situation of Theorem 1 $A+B$ will again be sectorial. More precisely, we have

Corollary 1. *Let the assumptions of Theorem* 1 *be satisfied, in particular let A and B satisfy the commutator condition* (2.6) *with $c<c_0$.*

Then $A+B$ is sectorial and $\phi_{A+B}\le\max\{\varphi_A,\varphi_B\}$.

Since the basic estimates for the resolvents and the imaginary powers of A and B are basically invariant under shifts $\nu+A$ or $\nu+B$ where $\nu>0$ (cf. Prüss and Sohr [17]), but the constant c in (2.6) decreases to zero if $\nu\to\infty$ after replacing β by a slightly smaller and α by a slightly larger number, it is possible to remove the smallness assumption on c, at the price of adding a possibly large constant ν to $A+B$. We state this observation as

Corollary 2. *Let the assumptions of Theorem* 1 *be satisfied, in particular let* A *and* B *satisfy the commutator condition* (2.6)*, however, without any restriction of the size of* $c > 0$.

Then $A + B$ *with domain* $D(A) \cap D(B)$ *is closed, and there is a number* $\nu_0 \geq 0$ *such that* $\nu + A + B$ *is invertible for every* $\nu > \nu_0$*, and there is a constant* $C > 0$ *such that*

$$|(\nu + A + B)^{-1}| \leq C/\nu \quad \text{for all } \nu > \nu_0.$$

In particular, the operator $\nu_0 + A + B$ *is sectorial.*

Some remarks concerning the commutator condition (2.6) seem to be in order. The natural expression to be considered should be the commutator of the resolvents of A and B, i.e.

$$C(\lambda, \mu) := (\lambda + A)^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}(\lambda + A)^{-1}.$$

If A and B are subject to the estimates (2.5) and (2.4), then

$$|C(\lambda, \mu)| \leq \frac{M_A M_B}{(1 + |\lambda|)|\mu|}, \quad \text{for all } \lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A},\ \mu \in \Sigma_{\pi - \varphi_B}.$$

This estimate suggests that, instead of (2.6), we look at conditions of the form

$$|C(\lambda, \mu)| \leq \frac{M_A M_B}{(1 + |\lambda|^p)|\mu|^q}, \quad \text{for all } \lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A},\ \mu \in \Sigma_{\pi - \varphi_B},$$

where p and q are nonnegative numbers such that $p + q > 2$. So far it is not known whether a condition of this type is sufficient to prove noncommutative versions of the Da Prato-Grisvard or Dore-Venni theorems. Observe that

$$C(\lambda, \mu) = A(\lambda + A)^{-1}[A^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}A^{-1}]A(\lambda + A)^{-1};$$

hence (2.6) implies an estimate for $C(\lambda, \mu)$ of the above mentioned type, where $p = 1 - \alpha$ and $q = 1 + \beta$, in particular $p + q = 2 + \beta - \alpha > 2$.

3. Applications to Evolution and Evolutionary Integral Equations

Let Y be a Banach space of class $\mathcal{HT}$, let $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ be a family of closed linear densely defined operators in X, probably with variable domains $D(L(t))$, and $a \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ a nontrivial scalar kernel of subexponential growth. The latter means that

$$\int_0^\infty |a(t)| e^{-\varepsilon t} dt < \infty \quad \text{for each } \varepsilon > 0.$$

Consider the following *evolutionary integral equation*:

$$u(t) + \int_0^t a(t - s)[\nu u(s) + L(s)u(s) - f(s)]ds = 0, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

where $f : \mathbf{R}_+ \to X$ is a given function, strongly measurable and locally integrable, at least. Observe that evolution equations of the type

$$\dot{u}(t) + L(t)u(t) + \nu u(t) = f(t), \quad t \geq 0, \qquad u(0) = 0, \tag{3.2}$$

are special cases of (3.1) ; choose $a(t) = 1$ and differentiate (3.1) to see this.

We want to study (3.1) in an L^p-setting by means of the results from Section 2. For this purpose let $X = L^p(\mathbf{R}_+; Y)$, where $p \in (1, \infty)$, with norm $|\cdot|_p$, and define an operator A in the standard way by means of

$$\begin{cases} (Au)(t) = L(t)u(t), & \text{for a.a. } t \geq 0, \\ D(A) = \{u \in X : u(t) \in D(L(t)) \text{ for a.a. } t \geq 0, Au \in X\}. \end{cases}$$

Then A is a closed linear operator in X. To obtain $A \in BIP(X)$ we impose the following condition on $L(t)$.

(L) *For each $t \geq 0$, $L(t) \in BIP(Y)$, and there are constants $M_A, K_A > 0$ and $\varphi_A \in (0, \pi)$ such that*

$$|(\lambda + L(t))^{-1}| \leq \frac{M_A}{1 + |\lambda|} \quad \textit{for all } t \geq 0,\ \lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A},$$

and

$$|L(t)^{is}| \leq K_A e^{|s|\varphi_A} \quad \textit{for all } t \geq 0,\ s \in \mathbf{R}.$$

It is easily seen that

$$((\lambda + A)^{-1} f)(t) = (\lambda + L(t))^{-1} f(t) \quad \text{for a.a. } t \geq 0 \text{ and all } \lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A},$$

and that

$$(A^{is} f)(t) = L(t)^{is} f(t) \quad \text{for a.a. } t \geq 0 \text{ and all } s \in \mathbf{R};$$

hence $A \in BIP(X)$ and estimates (2.3) and (2.5) are valid for A. Observe that A is densely defined, since for a given $f \in X$ the functions $f_n = n(n + A)^{-1} f$ belong to $D(A)$, are bounded a.e. by the function $M_A |f(t)|$ which belongs to $L^p(\mathbf{R}_+)$, and converge to $f(t)$ a.e. in Y, hence also in X, by Lebesgue's theorem.

The construction of B is not so obvious, except for the case of the evolution equation (3.2), i.e. $a(t) = 1$. In fact, in this case

$$(Bu)(t) = \frac{d}{dt} u(t), \quad t \geq 0, \quad D(B) = H_0^{1,p}(\mathbf{R}_+; Y),$$

where $H_0^{1,p}(\mathbf{R}_+; Y)$ denotes the space of all functions $u : \mathbf{R}_+ \to Y$ which are locally absolutely continuous, differentiable a.e., and such that $\dot{u} \in L^p(\mathbf{R}_+; Y)$ and $u(0) = 0$. Obviously, B is a closed linear densely defined operator in X, and it is easy to compute the resolvent of B:

$$((\mu + B)^{-1} f)(t) = \int_0^t e^{-\mu(t-s)} f(s) ds, \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

whenever $\operatorname{Re} \mu > 0$. In particular, B is sectorial with spectral angle $\phi_B = \pi/2$. The vector-valued Marcinkiewicz multiplier theorem (cf. Zimmermann [22], Prüss [16]) then implies $B \in BIP(X)$ and $\theta_B = \pi/2$ for the power angle of B. Thus assumptions (2.3) for B and (2.4) are valid, provided φ_B is chosen larger than $\pi/2$.

For the case of more general kernels $a(t)$ we refer to Theorem 8.6 and Proposition 8.2 of the second author's monograph [16]. The basic assumptions of these results which are valid in spaces $L^p(\mathbf{R}_+; Y)$, where Y belongs to the class $\mathcal{HT}$, are the following:

(a) $|\arg \widehat{a}(\lambda)| \leq \vartheta_B$ *and* $|\lambda \widehat{a}'(\lambda) / \widehat{a}(\lambda)| \leq \kappa$, *for all* $\lambda \in \Sigma_{\pi/2}$.

Here $\vartheta_B \in (0,\pi)$ and $\kappa > 0$ are constants, and the hat indicates Laplace transform. Following the terminology in Prüss [16], kernels satisfying an estimate of the form $|\arg \widehat{a}(\lambda)| \le \vartheta$ on $\Sigma_{\pi/2}$ will be called *ϑ-sectorial*, while kernels which are subject to $|\lambda^n \widehat{a}^{(n)}(\lambda)/\widehat{a}(\lambda)| \le \kappa$ on $\Sigma_{\pi/2}$ for all $n \le k$ will be termed *k-regular*. Then the operator B defined formally in terms of Laplace transforms according to

$$(Bu)\widehat{\ }(\lambda) = \frac{\widehat{u}(\lambda)}{\widehat{a}(\lambda)}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2},$$

gives rise to a closed linear densely defined operator B in X, which is sectorial and admits bounded imaginary powers, and satisfies $\phi_B \le \theta_B \le \vartheta_B$. In particular, assumptions (2.3) and (2.4) are valid for any $\varphi_B > \vartheta_B$. The resolvent of B is given by

$$((\mu + B)^{-1} f)(t) = \int_0^t r_\mu(t-s) f(s) ds, \quad t \ge 0, \tag{3.4}$$

where r_μ denotes the solution of the scalar Volterra equation

$$r_\mu(t) + \mu \int_0^t a(t-s) r_\mu(s) ds = a(t), \quad t \ge 0. \tag{3.5}$$

In particular, for $a(t) = 1$, i.e. for the case of evolution equations, we have $r_\mu(t) = e^{-\mu t}$, in accordance with (3.3).

Concerning the domain of B, we note the following proposition, which is implied by Corollaries 8.1 and 8.2 of Prüss [16] by restriction to the halfline.

Proposition 1. *Suppose the kernel $a(t)$ is subject to condition* **(a)**. *Let B be defined as above and $\rho > 0$. Then*

(i) $\limsup_{r\to\infty} |\widehat{a}(r)| r^\rho < \infty$ *implies* $D(B) \hookrightarrow H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y)$;

(ii) $\liminf_{r\to\infty} |\widehat{a}(r)| r^\rho > 0$ *and* $\liminf_{r\to 0+} |\widehat{a}(r)| > 0$ *imply* $H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y) \hookrightarrow D(B)$;

(iii) *if* $\lim_{t\to 0+} t^{-\rho} \int_0^t a(s) ds \ne 0, \infty$ *exists and in addition* $\liminf_{r\to 0+} |\widehat{a}(r)| > 0$, *then* $D(B) = H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y)$.

Here the spaces $H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y)$ are defined as follows: $u \in H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y)$ if and only if its extension by 0 to all of $\mathbf{R}$ belongs to $H^{\rho,p}(\mathbf{R}; Y)$; see Prüss [16] for the latter. In particular the traces at $t = 0$ of the derivatives of $u \in H_0^{\rho,p}(\mathbf{R}_+; Y)$ which exist are zero. Recall that $\rho > \sigma + 1/p$ implies $H^{\rho,p}(\mathbf{R}; Y) \hookrightarrow C^\sigma(\mathbf{R}; Y)$.

Observe that the second condition in *(ii)* and *(iii)* holds if $a(t)$ is nonnegative and nontrivial, as will be the case in all examples to be considered here. Let us show that the first part of *(ii)* in Proposition 1 is satisfied with $\rho_0 = 2\vartheta_B/\pi$, whenever the kernel $a(t)$ is subject to **(a)**. For this purpose we take the analytic completion of the Poisson formula for the harmonic function $h(\lambda) = \arg \widehat{a}(\lambda)$, which reads

$$\log \widehat{a}(\lambda) = \kappa_0 + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 - i\rho\lambda}{\lambda - i\rho} \right] h(i\rho) \frac{d\rho}{1+\rho^2},$$

where $\kappa_0 \in \mathbf{R}$ is a suitable constant. Considering only real $\lambda > 1$ and estimating the real part of this formula, we obtain

$$|\operatorname{Re} \log \widehat{a}(\lambda)| \le \kappa_0 + \rho_0 \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1} \log \lambda \le \kappa + \rho_0 \log \lambda,$$

for some constant κ. But this implies

$$|\widehat{a}(\lambda)| = e^{\log|\widehat{a}(\lambda)|} \geq e^{-|\operatorname{Re}\log \widehat{a}(\lambda)|} \geq e^{-\kappa-\rho_0\log\lambda} = c\lambda^{-\rho_0},$$

where $c = e^{-\kappa} > 0$. Thus as a result we have the inequality

$$|\widehat{a}(r)| \geq cr^{-\rho_0}, \quad \text{for all } r > 1. \tag{3.6}$$

Observe that $\rho_0 < 2$ by the sector condition **(a)**.

Returning to the abstract treatment of (3.1), with the definitions of A and B given above, (3.1) can be rewritten in the form as $\nu u + Au + Bu = f$, and we are in position to apply Theorem 1 as well as Corollaries 1 and 2, once we have verified the commutator condition (2.6).

Let

$$Z(\lambda,\mu) = A(\lambda + A)^{-1}[A^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}A^{-1}];$$

with the representations of the resolvents of A and B described above we then have

$$(Z(\lambda,\mu)f)(t) = \int_0^t r_\mu(t-s)L(t)(\lambda + L(t))^{-1}[L(t)^{-1} - L(s)^{-1}]f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Therefore,

$$|(Z(\lambda,\mu)f)(t)| \leq \int_0^t |r_\mu(t-s)||L(t)(\lambda + L(t))^{-1}[L(t)^{-1} - L(s)^{-1}]||f(s)|ds,\ t \geq 0,$$

and it appears that in order to establish (2.6) we need assumptions on the quantity $|L(t)(\lambda + L(t))^{-1}[L(t)^{-1} - L(s)^{-1}]|$ and on the kernels $|r_\mu(t)|$. Let the following conditions be satisfied in addition to **(L)** and **(a)**.

(C) *There exist constants $\alpha \in [0,1)$, $\delta \in (0,1]$ and $M_1 > 0$ such that*

$$|L(t)(\lambda + L(t))^{-1}[L(t)^{-1} - L(s)^{-1}]| \leq \frac{M_1|t-s|^\delta}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}} \quad \textit{for all } t,s \geq 0,\ \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}.$$

(r) *There exist constants $\beta > 0$ and $M_2 > 0$ such that*

$$|t^\delta r_\mu|_1 \leq \frac{M_2}{|\mu|^{1+\beta}}, \quad \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}.$$

Then we obtain the estimates

$$\begin{aligned} |Z(\lambda,\mu)f|_p &\leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}}\left|\int_0^t |r_\mu(t-s)||t-s|^\delta|f(s)|ds\right|_p \\ &\leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|^{1-\alpha}}|t^\delta r_\mu|_1|f|_p \\ &\leq \frac{M_1M_2}{(1 + |\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}|f|_p, \quad \text{for all } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},\ \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}, \end{aligned}$$

and for each $f \in L^p(\mathbf{R}_+;Y)$. Therefore the commutator condition (2.6) follows, provided $\beta > \alpha$.

In Section 5 we discuss the assumptions **(a)** and **(r)** on the kernel $a(t)$ in detail. For the moment we observe that for the case of evolution equations $a(t) = 1$ we have $r_\mu(t) = e^{-\mu t}$; hence

$$|t^\delta r_\mu|_1 \leq \Gamma(1+\delta)/(\operatorname{Re}\ \mu)^{1+\delta}, \quad \mu \in \Sigma_{\pi/2},\ \delta > -1,$$

where Γ means the gamma function. Therefore $\beta = \delta$ in this case, and (2.6) is valid if **(C)** holds with $0 \leq \alpha < \delta \leq 1$.

Conditions **(L)** and **(C)** on the family of operators $\{L(t)\}_{t\geq 0}$ will be discussed to some extent for the case of elliptic partial differential operators on $Y = L^q(\Omega)$ in Section 6. They have been used before for the case of evolution equations by Acquistapace and Terreni [2]. Observe that in the case of constant domains $D(L(t)) = D_0$ for $t \geq 0$, condition **(C)** with $\alpha = 0$ is implied by the resolvent estimate in **(L)** and by the classical condition

(C0) *There exist constants $\delta \in (0, 1]$ and $M_3 > 0$ such that*

$$|[L(t) - L(s)]L^{-1}(s)| \leq M_3|t - s|^{\delta} \quad \textit{for all } t, s \geq 0,$$

which was introduced by Sobolevskii [19] and by Kato and Tanabe (see [20]).

Let us summarize our considerations in

Theorem 2. *Let Y be a Banach space of class $\mathcal{HT}$, $\{L(t)\}_{t\geq 0}$ a family of closed linear densely defined operators in Y which is subject to **(L)** and **(C)**, let $a \in L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ be a kernel of subexponential growth which satisfies **(a)** and **(r)**, and let $\nu \geq 0$ and $p \in (1, \infty)$. Assume that* (3.1) *is parabolic in the sense that $\varphi_A + \varphi_B < \pi$, and assume $\beta > \alpha$.*

If either $\nu \geq 0$ is sufficiently large or M_1M_2 is sufficiently small, then for every $f \in L^p(\mathbf{R}_+; Y)$, (3.1) *admits a unique solution $u \in L^p(\mathbf{R}_+; Y)$ such that $u(t) \in D(L(t))$ for a.a. $t \geq 0$ and $L(\cdot)u \in L^p(\mathbf{R}_+; Y)$. Moreover, if $\limsup_{r\to\infty} |\widehat{a}(r)|r^{\rho} < \infty$ for some $\rho \geq 0$, then $u \in H^{\rho,p}_0(\mathbf{R}_+; Y)$.*

In case (3.1) is considered on a finite interval $J = [0, T]$, then no restrictions on the size of M_1M_2 or the magnitude of ν are needed. In fact, multiplying (3.1) by $e^{-\omega t}$ and setting $v(t) = e^{-\omega t}u(t)$ and $g(t) = e^{-\omega t}f(t)$, (3.1) is transformed into an equation of the same type, with $a(t)$ replaced by $a_\omega(t) = e^{-\omega t}a(t)$. This way conditions **(a)** and **(r)** remain valid with the same constants. Taking the inverse convolution of this new equation with $\delta_0 + (\nu - \nu_0)a_\omega$, where δ_0 denotes the Dirac distribution and $\nu_0 > 0$ is large, there results an equation of the form (3.1) with ν replaced by ν_0 and a_ω by $r_{\omega,\nu-\nu_0}$. Then given $\nu_0 > 0$, choosing ω sufficiently large, **(a)** and **(r)** are still satisfied, probably with slightly larger constants. Thus as a corollary to Theorem 2 we obtain

Corollary 3. *Assume that the assumptions of Theorem 2 are satisfied, without restrictions on the magnitudes of $\nu \in \mathbf{R}$ or M_1M_2, and let $J = [0, T]$.*

Then for every $f \in L^p(J; Y)$, (3.1) *admits a unique solution $u \in L^p(J; Y)$ such that $u(t) \in D(L(t))$ for a.a. $t \in J$ and $L(\cdot)u \in L^p(J; Y)$. Moreover, if $\limsup_{r\to\infty} |\widehat{a}(r)|r^{\rho} < \infty$ for some $\rho \geq 0$, then $u \in H^{\rho,p}_0(J; Y)$.*

4. Proof of the Main Results

In this section, we want to give the proof of Theorem 1 stated in Section 2. For this purpose fix A, B, θ_A, θ_B, φ_A, φ_B, M_A, M_B, c, K_A, K_B as in Section 2. We begin with a general lemma.

Lemma 1. *Let $\{F_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ be a strongly measurable family of bounded linear operators in X which is exponentially bounded in the sense that there are constants $K > 0$ and $\theta < \pi$ such that*

$$|F_t x| \leq K e^{\theta|t|}|x|, \quad \textit{for all } x \in X,\ t \in \mathbf{R}.$$

Then, for each $x \in X$ *and* $a > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|s| \geq \varepsilon} F_{t-s}x \ \frac{ds}{\sinh \pi s} \text{ exists a.e. on } (-a, a),$$

the function

$$\mathcal{F}x : t \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i} \int_{|s| \geq \varepsilon} F_{t-s}x \ \frac{ds}{\sinh \pi s}$$

belongs to $L^2((-a, a); X)$ *and*

$$|\mathcal{F}x|_{L^2((-a,a);X)} \leq c(a, K, \theta, \mathcal{H}_2)|x|,$$

where $c(a, K, \theta, \mathcal{H}_2)$ *denotes a constant which only depends on* a*,* K*,* θ*, and the norm* $\mathcal{H}_2$ *of the Hilbert transform in* $L^2(\mathbf{R}, X)$*.*

Proof. The proof is based on the boundedness of the Hilbert transform in $L^2(\mathbf{R}, X)$, since X is of class $\mathcal{HT}$. It is basically due to Dore-Venni [9]. For each $\varepsilon \in (0, a)$, we have

$$\frac{1}{2i} \int_{|s| \geq \varepsilon} F_{t-s}x \ \frac{ds}{\sinh \pi s} = \frac{1}{2i} \int_{|s| \geq 2a} F_{t-s}x \ \frac{ds}{\sinh \pi s}$$
$$+ \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 2a} F_{t-s}x \left(\frac{1}{\sinh \pi s} - \frac{1}{\pi s} \right) ds + \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 2a} F_{t-s}x \ \frac{ds}{s}.$$

It is easy to deal with the first two terms since $\frac{1}{|\sinh \pi s|} \leq 4e^{-\pi|s|}$ for all $s \in \mathbf{R}, |s| \geq 1$, and $|\frac{1}{\sinh \pi s} - \frac{1}{\pi s}| = \frac{\pi|s|}{6} + o(|s|)$ for $|s|$ near 0. The difficult term is the third one:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon \leq |s| \leq 2a} F_{t-s}x \ \frac{ds}{s} = \frac{1}{2i}(H_\varepsilon f)(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-2a}^{t-2a} F_{t-s}x \ \frac{ds}{s}$$
$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{2a}^{t+2a} F_{t-s}x \ \frac{ds}{s},$$

where $f(r) = \chi_{(-2a,2a)} F_r x$, and $(H_\varepsilon g)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|s| \geq \varepsilon} g(t-s) \ \frac{ds}{s}$ denotes the truncated Hilbert transform. Since $f \in L^2(\mathbf{R}, X)$, we know that $(H_\varepsilon f)(t)$ converges for a.e. $t \in \mathbf{R}$, and in $L^2(\mathbf{R}, X)$ as $\varepsilon \to 0^+$. We restrict ourselves to the interval $(-a, a)$ to assure the convergence of the two other terms. The bound of $|\mathcal{F}x|_{L^2(-a,a);X)}$ is now immediate, since $|f|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq 2Ke^{2\theta a}|x|$. □

The next main idea is to approximate A and B by bounded invertible operators. Since A is already invertible, it is sufficient to replace it by $A_\delta = A(1 + \delta A)^{-1}$, $\delta \in (0, 1)$; B is approximated by $B_\delta = (B + \delta)(1 + \delta B)^{-1}$, $\delta \in (0, 1)$. For all $\delta \in (0, 1)$, A_δ and B_δ are bounded and invertible operators, and we have

$$\lim_{\delta \to 0^+} A_\delta x = Ax \text{ for all } x \in D(A) \qquad \text{and} \qquad \lim_{\delta \to 0^+} B_\delta x = Bx \text{ for all } x \in D(B).$$

Moreover, we know that A_δ and B_δ satisfy (2.3) with constants K'_A and K'_B independent of $\delta \in (0, 1)$; to see this use $A \in BIP(X) \iff A^{-1} \in BIP(X)$, and apply Theorem 3 of Prüss-Sohr [17]. The operator B_δ also satisfies (2.4) with M'_B independent of $\delta \in (0, 1)$, and for A_δ inequality (2.5) with M'_A independent of $\delta \in (0, 1)$ is valid.

Let us define the following bounded linear operators S_δ and T_δ for each $\delta \in (0, 1)$:

$$S_\delta = \frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} A_\delta^{-z} B_\delta^{z-1} \frac{dz}{\sin(\pi z)} \quad \text{and} \quad T_\delta = \frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} B_\delta^{-z} A_\delta^{z-1} \frac{dz}{\sin(\pi z)},$$

where $\gamma \in (0,1)$ is arbitrary; observe that the integrals are absolutely convergent, thanks to (2.3). Since the functions $z \mapsto A_\delta^{-z} B_\delta^z$ and $z \mapsto B_\delta^{-z} A_\delta^z$ are holomorphic on $\mathbf{C}$, the theorem of residues implies the identities

$$A_\delta S_\delta x + S_\delta B_\delta x = x \quad \text{and} \quad T_\delta A_\delta x + B_\delta T_\delta x = x, \quad \text{for all } x \in X,\ \delta \in (0,1).$$

We show next that A_δ and B_δ satisfy the commutator condition (2.6) with a constant c' independent of $\delta \in (0,1)$.

Lemma 2. *Let $Z_\delta(\lambda,\mu) = A_\delta(\lambda + A_\delta)^{-1}[A_\delta^{-1}(\mu + B_\delta)^{-1} - (\mu + B_\delta)^{-1}A_\delta^{-1}]$ for all $\delta \in (0,1)$. Then there exists a constant $c(\varphi_A,\varphi_B)$ which depends only on φ_A and φ_B such that*

$$|Z_\delta(\lambda,\mu)| \le \frac{c \cdot c(\varphi_A,\varphi_B)}{(1+|\lambda|^{1-\alpha})|\mu|^{1+\beta}}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}, \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},$$

where α and β denote the same constants as in (2.6).

Proof. A simple calculation gives for all $\delta \in (0,1)$

$$Z_\delta(\lambda,\mu) = \frac{1-\delta^2}{(1+\delta\lambda)(1+\delta\mu)^2}\ Z\left(\frac{\lambda}{1+\delta\lambda}, \frac{\mu+\delta}{1+\delta\mu}\right),$$

for all $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ and $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}$, where

$$Z(\lambda,\mu) = A(\lambda + A)^{-1}[A^{-1}(\mu + B)^{-1} - (\mu + B)^{-1}A^{-1}].$$

Then the commutator condition (2.6) gives the expected bound, where

$$\begin{aligned} c(\varphi_A,\varphi_B) \quad = \quad & \sup\left\{\frac{1}{|1+\delta\lambda|^{\alpha}|1+\delta\mu|^{1-\beta}}\ ;\ \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}, \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},\ \delta \in (0,1)\right\} \\ & \cdot \sup\left\{|\frac{\mu}{\mu+\delta}|^{1+\beta}\ ;\ \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},\ \delta \in (0,1)\right\} \\ & \cdot \sup\left\{|1+\delta\lambda|^{\alpha-1}\ ;\ \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A},\ \delta \in (0,1)\right\}. \end{aligned}$$

□

Let us derive different representations of S_δ and T_δ, $\delta \in (0,1)$. For this purpose we fix $\theta < \varphi_B$, $\varphi < \varphi_A$ and $\delta_0 \in (0,1)$ such that

$$\left(\bigcup_{0<\delta<\delta_0} \sigma(B_\delta) \cup \sigma(B)\right) \subset \Sigma_\theta \quad \text{and} \quad \left(\bigcup_{0<\delta<\delta_0} \sigma(A_\delta) \cup \sigma(A)\right) \subset \Sigma_\varphi,$$

and $\delta \in (0,\delta_0)$. Let $R_\delta > \sup\{|\mu|\ ;\ \mu \in \sigma(B_\delta)\}$ and $0 < r_\delta < \inf\{|\mu|\ ;\ \mu \in \sigma(B_\delta)\}$. We denote by Γ_B^δ the following contour:

$$[r_\delta, R_\delta]e^{-i\theta} \cup R_\delta e^{i[-\theta,\theta]} \cup [R_\delta, r_\delta]e^{i\theta} \cup r_\delta e^{i[\theta,-\theta]};$$

Γ_B^δ is a positively directed contour which surrounds $\sigma(B_\delta)$. The functional calculus of Dunford yields

$$B_\delta^{z-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_B^\delta} \mu^{z-1}(\mu - B_\delta)^{-1}d\mu \quad \text{for all } z \in \mathbf{C}.$$

The same argument can be applied to A_δ:

$$\Gamma_A^\delta = [r'_\delta, R'_\delta]e^{-i\varphi} \cup R'_\delta e^{i[-\varphi,\varphi]} \cup [R'_\delta, r'_\delta]e^{i\varphi} \cup r'_\delta e^{i[\varphi,-\varphi]},$$

where $R'_\delta > \sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(A_\delta)\}$ and $0 < r'_\delta < \inf\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \sigma(A_\delta)\}$, and we obtain

$$A_\delta^{-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_A^\delta} \lambda^{-z}(\lambda - A_\delta)^{-1} d\lambda \quad \text{for all } z \in \mathbf{C}.$$

Hence, once $\gamma \in (0,1)$ has been chosen, Fubini's theorem yields

$$S_\delta = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_B^\delta}\int_{\Gamma_A^\delta}\left(\frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-z}\mu^{z-1}\frac{dz}{\sin \pi z}\right)(\lambda - A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1} d\lambda d\mu.$$

Since $|\arg\lambda| + |\arg\mu| \le \varphi + \theta < \pi$, the inverse Mellin transform gives

$$\frac{1}{\lambda + \mu} = \frac{1}{2i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-z}\mu^{z-1}\frac{dz}{\sin \pi z},$$

and the functional calculus of Dunford implies that

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_A^\delta}\frac{1}{\lambda + \mu}(\lambda - A_\delta)^{-1} d\lambda = (\mu + A_\delta)^{-1}.$$

Therefore

$$S_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_B^\delta}(\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1} d\mu. \tag{4.1}$$

Thanks to the estimates (2.4) and (2.5), by holomorphy we may deform the contour Γ_B^δ into $\Gamma = (\infty, 0]e^{i\theta} \cup [0,\infty)e^{-i\theta}$, which leads to

$$S_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(\mu + A_\delta)^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1} d\mu, \quad \text{for all } \delta \in (0,\delta_0). \tag{4.2}$$

In the same way, we can show that

$$T_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(\mu - B_\delta)^{-1}(\mu + A_\delta)^{-1} d\mu, \quad \text{for all } \delta \in (0,\delta_0), \tag{4.3}$$

with the same contour Γ.

As $\delta \to 0^+$ the integrands in these formulas converge strongly for every $\mu \in \Gamma$, and are uniformly bounded by a function which is integrable on Γ. Therefore by Lebesgue's theorem

$$\lim_{\delta \to 0^+} S_\delta x = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(\mu + A)^{-1}(\mu - B)^{-1}x\, d\mu =: Sx, \quad x \in X, \tag{4.4}$$

and

$$\lim_{\delta \to 0^+} T_\delta x = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}(\mu - B)^{-1}(\mu + A)^{-1}x\, d\mu =: Tx, \quad x \in X. \tag{4.5}$$

We are now in position to state the following lemma, which is the main step in the proof of invertibility of $A + B$.

Lemma 3. *S maps X into $D(A)$, $AS \in \mathcal{B}(X)$ and $ASx + SBx = x$ for all $x \in D(B)$. Consequently SB admits a unique bounded extension to all of X.*

Proof. *(i)* For all $\delta \in (0,\delta_0)$ and for all $x \in D(B)$, $\lim_{\delta \to 0^+} S_\delta B_\delta x = SBx$ since $S_\delta \to S$ strongly as $\delta \to 0^+$ and $B_\delta x \to Bx$ as $\delta \to 0^+$ for $x \in D(B)$. Then $A_\delta S_\delta x \to x - SBx$ as $\delta \to 0^+$, since $A_\delta S_\delta x + S_\delta B_\delta x = x$ for all $\delta \in (0,1)$.

On the other hand, $A_\delta S_\delta x = A(1+\delta A)^{-1}S_\delta x$ and $(1+\delta A)^{-1}x \to x$ for all $x \in X$ as $\delta \to 0^+$; hence $(1+\delta A)^{-1}S_\delta x \to Sx$ as $\delta \to 0^+$. Therefore, since A is closed, $Sx \in D(A)$ and $ASx = x - SBx$ for all $x \in D(B)$.

(ii) For all $x \in X$ and all $\delta \in (0, \delta_0)$, we have

$$S_\delta B_\delta = \frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} A_\delta^{-z} B_\delta^z \, \frac{dz}{\sin(\pi z)}, \ \gamma \in (0,1).$$

To show that $S_\delta B_\delta$ is bounded uniformly w.r.t. $\delta \in (0,1)$, write

$$A_\delta^{-z} B_\delta^z = A_\delta^{-it}(A_\delta^{it-z} B_\delta^z - B_\delta^z A_\delta^{it-z}) + A_\delta^{-it} B_\delta^{it} B_\delta^{z-it} A_\delta^{it-z}.$$

Since $z \mapsto B_\delta^z A_\delta^{-z} \in \mathcal{B}(X)$ is holomorphic in $\{z \in \mathbf{C} \ ; \ 0 < Re z < 1\}$ thanks to Lemma 1 with $F_t^\delta x = B_\delta^{-it} A_\delta^{it} x$, shifting the contour to the imaginary axis, we have for a.a. $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} A_\delta^{-it} B_\delta^{it} B_\delta^{z-it} A_\delta^{it-z} \frac{dz}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{2} \ x + A_\delta^{-it} B_\delta^{it} (\mathcal{F}_\delta x)(t),$$

where $\mathcal{F}_\delta x$ corresponds to F_t^δ as in Lemma 1. On the other hand, thanks to the functional calculus of Dunford, we have

$$\begin{aligned} & A_\delta^{it-z} B_\delta^z - B_\delta^z A_\delta^{it-z} \\ & = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_A^\delta} \int_{\Gamma_B^\delta} \lambda^{it-z} \mu^z [(\lambda - A_\delta)^{-1} (\mu - B_\delta)^{-1} - (\mu - B_\delta)^{-1} (\lambda - A_\delta)^{-1}] \, d\mu d\lambda \\ & \quad = \frac{-1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_A^\delta} \int_{\Gamma_B^\delta} \lambda^{it-z} \mu^z Z_\delta(-\lambda, -\mu) A_\delta (\lambda - A_\delta)^{-1} d\mu d\lambda, \end{aligned}$$

and therefore integration over $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ yields

$$\begin{aligned} S_\delta B_\delta x \quad & = \quad \frac{1}{2} \ x \ + \ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A_\delta^{-it} B_\delta^{it} (\mathcal{F}_\delta x)(t) \ dt \\ & \qquad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_A^\delta} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \lambda^{it} A_\delta^{-it} dt \right) \lambda Z_\delta(-\lambda, \lambda) A_\delta (\lambda - A_\delta)^{-1} x \ d\lambda, \end{aligned}$$

since

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \lambda^{-z} \mu^z \frac{dz}{\sin \pi z} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

by the inverse Mellin transform, for any $\gamma \in (0,1)$, $\lambda \in \Gamma_A^\delta$ and $\mu \in \Gamma_B^\delta$, and

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} \frac{\mu}{\lambda + \mu} (\mu - B_\delta)^{-1} d\mu = B_\delta (\lambda + B_\delta)^{-1}$$

by the Dunford calculus. As in the derivation of (4.1) we may deform the contour Γ_A^δ into $\Gamma' = (\infty, 0) e^{i\varphi} \cup (0, \infty) e^{-i\varphi}$. Therefore we obtain the following estimate:

$$\begin{aligned} |S_\delta B_\delta x| \quad & \leq \quad \frac{1}{2} \ |x| \ + \ K'_A K'_B e^{\pi/2} |\mathcal{F}_\delta x|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; X)} \\ & \qquad + K'_A \frac{e^\pi}{2\pi} \left| \int_{\Gamma'} |\lambda| |Z_\delta(-\lambda, \lambda)| (M'_A + 1) |x| |d\lambda| \right| \\ & \leq \quad \frac{1}{2} \ |x| \ + \ K'_A K'_B e^{\pi/2} c(K'_A K'_B, \phi_A + \phi_B, \mathcal{H}_2) \\ & \qquad + c'(M'_A + 1) K'_A \frac{e^\pi}{\pi} \left(\int_0^\infty \frac{dr}{(1 + r^{1+\alpha}) r^\beta} \right) |x| \\ & \leq \quad C|x|, \qquad \text{for all } x \in X, \end{aligned}$$

where $C > 0$ denotes a constant which is independent of $x \in X$ and $\delta \in (0, \delta_0)$. Since $D(B)$ is dense in X and $\lim_{\delta \to 0^+} S_\delta B_\delta x = SBx$ for all $x \in D(B)$, SB is bounded and admits a unique bounded extension $\overline{SB}$ on X. Since A is closed, $Sx \in D(A)$ and $ASx + \overline{SB}x = x$ for all $x \in X$. Moreover, $AS = 1 - \overline{SB} \in \mathcal{B}(X)$. $\square$

We now construct the operator Q as announced in Section 2.

Lemma 4. *Let $Q = AS - A^2 S A^{-1}$. Then $Q \in \mathcal{B}(X)$ and $|Q| < 1$, provided the constant c from* (2.6) *is small enough.*

Proof. Let

$$\begin{aligned} Q_\delta &= A_\delta S_\delta - A_\delta^2 S_\delta A_\delta^{-1} \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} A_\delta^{-z+2} (A_\delta^{-1} B_\delta^{z-1} - B_\delta^{z-1} A_\delta^{-1}) \, \frac{dz}{\sin \pi z}, \end{aligned}$$

for $\gamma \in (0,1)$ and $\delta \in (0, \delta_0)$. As before we have

$$B_\delta^{z-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} \mu^{z-1} (\mu - B_\delta)^{-1} d\mu.$$

Hence by Fubini's theorem

$$\begin{aligned} Q_\delta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} \left(\frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mu^{z-1} A_\delta^{-z+2} \frac{dz}{\sin \pi z} \right) \\ &\qquad \cdot \left(A_\delta^{-1} (\mu - B_\delta)^{-1} - (\mu - B_\delta)^{-1} A_\delta^{-1} \right) d\mu. \end{aligned}$$

The theorem of residues implies

$$(1 + \mu A_\delta^{-1}) \, \frac{1}{2i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mu^{z-1} A_\delta^{-z+2} \frac{dz}{\sin \pi z} = -\frac{1}{2i} \, 2i\pi \; \mathrm{Res}_{z=1} \left(\frac{\mu^{z-1} A_\delta^{-z+2}}{\sin \pi z} \right) = A_\delta.$$

Therefore

$$\begin{aligned} Q_\delta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} A_\delta (1 + \mu A_\delta^{-1})^{-1} \left(A_\delta^{-1} (\mu - B_\delta)^{-1} - (\mu - B_\delta)^{-1} A_\delta^{-1} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} A_\delta (1 - \mu (\mu + A_\delta)^{-1}) \left(A_\delta^{-1} (\mu - B_\delta)^{-1} - (\mu - B_\delta)^{-1} A_\delta^{-1} \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_B^\delta} \mu Z_\delta(\mu, -\mu) \; d\mu, \end{aligned}$$

since $\displaystyle\int_{\Gamma_B^\delta} (\mu - B_\delta)^{-1} d\mu = 1$.

By means of the commutator condition (2.6) and Lebesgue's theorem, deforming first Γ_B^δ into Γ as before, we arrive at

$$\lim_{\delta \to 0^+} Q_\delta x = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \mu Z(\mu, -\mu) x \; d\mu =: Qx, \quad x \in X.$$

In particular, $Q \in \mathcal{B}(X)$,

$$|Q_\delta| \le \frac{c'}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^{1-\alpha}) r^\beta} \; dr < \infty,$$

and

$$|Q| \le \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^{1-\alpha}) r^\beta} \; dr.$$

It is then possible to choose $c_1 > 0$ such that for all $c < c_1$, $|Q|$ and $|Q_\delta|$ are smaller than 1.

Finally, $Q_\delta x - A_\delta S_\delta x \longrightarrow Qx - ASx$ and $(1+\delta A)^{-1} A_\delta S_\delta A_\delta^{-1} x \longrightarrow ASA^{-1}x$ as $\delta \to 0^+$, for all $x \in X$, and therefore with $A_\delta^2 S_\delta A_\delta^{-1} x = A(1+\delta A)^{-1} A_\delta S_\delta A_\delta^{-1} x$, closedness of A implies $ASA^{-1}x \in D(A)$ and $Qx = ASx - A^2 AA^{-1}x$, for all $x \in X$. □

We are now in position to obtain a left inverse of $(A+B, D(A)\cap D(B))$: $L \in \mathcal{B}(X)$ and $L(Ax+Bx) = x$ for all $x \in D(A) \cap D(B)$.

Proposition 2. *Let c in* (2.6) *be small enough* (*as in Lemma* 4) *and define $L = A^{-1}(1+Q)^{-1}AS$. Then $L \in \mathcal{B}(X)$ and $L(Ax+Bx) = x$ for all $x \in D(A)\cap D(B)$. The range of L is contained in the domain of A.*

Proof. Let $L_\delta = A_\delta^{-1}(1+Q_\delta)^{-1}A_\delta S_\delta$ for every $\delta \in (0,1)$. We have

$$L_\delta(A_\delta x + B_\delta x) = x \quad \text{ for all } x \in X,$$

since $A_\delta S_\delta x + S_\delta B_\delta x = x$. Next, $\lim\limits_{\delta\to 0^+} A_\delta^{-1}(1+Q_\delta)^{-1}x = A^{-1}(1+Q)^{-1}x$ and the relation $\lim\limits_{\delta\to 0^+} A_\delta S_\delta x = ASx$, for all $x \in X$, imply $\lim\limits_{\delta\to 0^+} L_\delta x = Lx$ for all $x \in X$. The operator L is obviously bounded, since A is invertible, $|Q| < 1$ and AS is bounded thanks to Lemma 3. Using the relation $L_\delta A_\delta x + L_\delta B_\delta x = x$ for all $x \in X$ and all $\delta \in (0,1)$, since

$$\lim_{\delta\to 0^+} A_\delta x = Ax \quad \text{ and } \quad \lim_{\delta\to 0^+} B_\delta x = Bx$$

for all $x \in D(A)\cap D(B)$, we obtain $L(Ax+Bx) = x$ for all $x \in D(A)\cap D(B)$. Obviously, $R(L) \subset D(A)$, and $AL = (1+Q)^{-1}AS$ is bounded. □

We know by now that L is a bounded operator on X and a left inverse of $A+B$ with domain $D(A)\cap D(B)$ and maps X into $D(A)$. We next construct a right inverse R of $(A+B, D(A)\cap D(B))$ using similar methods as for L.

Lemma 5. *TA defined on $D(A)$ is bounded in X and admits a unique bounded extension $\overline{TA}$ to all of X. Moreover, $R(T) \subset D(B)$ and $BT \in \mathcal{B}(X)$.*

Proof. Formulas (4.2) and (4.3) imply

$$\begin{aligned} &A_\delta S_\delta - T_\delta A_\delta \\ &\quad = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mu A_\delta(\mu + A_\delta)^{-1}\left((\mu - B_\delta)^{-1}A_\delta^{-1} - A_\delta^{-1}(\mu - B_\delta)^{-1}\right)A_\delta(\mu+A_\delta)^{-1} d\mu \\ &\quad\quad = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mu Z_\delta(\mu,-\mu)A_\delta(\mu+A_\delta)^{-1}d\mu. \end{aligned}$$

Passing to the limit as $\delta \to 0^+$, Lebesgue's theorem yields

$$AS - TA = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mu Z(\mu,-\mu)A(\mu+A)^{-1}d\mu.$$

Thanks to the commutator condition (2.6), the right hand side of the last equation defines a bounded operator. Since AS is bounded, we have the expected result. The remaining assertions follow from $B_\delta T_\delta + T_\delta A_\delta = 1$, which implies with $\delta \to 0^+$ the identity $BTx + TAx = x$, for all $x \in D(A)$. □

Before we construct the operator P of Section 2, observe that by virtue of the moments inequality

$$|A^\gamma(\lambda + A^{-1}| \le \frac{M}{(1+|\lambda|)^{1-\gamma}} \quad \text{for all} \quad \lambda \in \Sigma_{\phi_A},\ \gamma \in [0,1],$$

where $M > 0$ denotes a constant independent of $\gamma \in [0,1]$.

Lemma 6. *There exists a constant $\gamma \in (0,1)$ such that $P = A^{-\gamma}(TA - AT)A^\gamma$ defines a bounded operator and $|P| < 1$, whenever the constant c from* (2.6) *is small enough.*

Proof. For every $\delta \in (0,1)$, we have

$$T_\delta = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_B^\delta} (\mu - B_\delta)^{-1}(\mu + A_\delta)^{-1} d\mu.$$

Therefore

$$\begin{aligned}
P_\delta &= A_\delta^{-\gamma}(T_\delta A_\delta - A_\delta T_\delta)A_\delta^\gamma \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_A^\delta}\int_{\Gamma_B^\delta} \lambda^{-\gamma}(\lambda - A_\delta)^{-1}\big((\mu - B_\delta)^{-1}(\mu + A_\delta)^{-1}A_\delta \\
&\qquad\qquad - A_\delta(\mu - B_\delta)^{-1}(\mu + A_\delta)^{-1}\big) A_\delta^\gamma \ d\mu d\lambda \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_A^\delta}\int_{\Gamma_B^\delta} \lambda^{-\gamma} Z_\delta(-\lambda,-\mu)A_\delta(\mu + A_\delta)^{-1}A_\delta^\gamma \ d\mu d\lambda \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \lambda^{-\gamma}\mu Z_\delta(-\lambda,-\mu)A_\delta^\gamma(\mu + A_\delta)^{-1} d\mu d\lambda,
\end{aligned}$$

where Γ and Γ' are as before, and since $\int_{\Gamma_B^\delta}(\mu - B_\delta)^{-1}d\mu = 1$. The convergence of both integrals is due to the commutator condition (2.6) and the remark before Lemma 6, if we choose $\gamma \in (\alpha,\beta)$. Moreover, thanks to Lebesgue's theorem, we have

$$\lim_{\delta\to 0^+} P_\delta x = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \lambda^{-\gamma}\mu Z(-\lambda,-\mu)A^\gamma(\mu + A)^{-1}x \ d\mu d\lambda =: Px, \quad x \in X.$$

Furthermore, with $r = |\lambda|$ and $s = |\mu|$,

$$|P_\delta| \le M_A' \ \frac{c'}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{r^{-\gamma}}{1 + r^{1-\alpha}} \ dr \ \int_0^\infty \frac{s^{-\beta}}{(1+s)^{1-\gamma}} \ ds,$$

and

$$|P| \le M_A \ \frac{c}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{r^{-\gamma}}{1 + r^{1-\alpha}} \ dr \int_0^\infty \frac{s^{-\beta}}{(1+s)^{1-\gamma}} \ ds.$$

It is then possible to choose $c_2 > 0$ such that for all $c \le c_2$, $|P|, |P_\delta| < 1$ for all $\delta \in (0,\delta_0)$. □

We are now in position to obtain a right inverse of the operator $A + B$ with domain $D(A) \cap D(B)$: in other words, an operator $R \in \mathcal{B}(X)$, such that R maps X into $D(A) \cap D(B)$ and $(A+B)Rx = x$ for all $x \in X$.

Proposition 3. *Let the constant c in* (2.6) *be smaller than c_1 and c_2, choose $\gamma \in (\alpha,\beta)$, and define $R = \overline{TA}A^{\gamma-1}(1-P)^{-1}A^{-\gamma}$. Then $R \in \mathcal{B}(X)$, R maps X into $D(A)\cap D(B)$, and $(A+B)Rx = x$ for all $x \in X$. Moreover $R = L$, and it is the inverse of $A + B$.*

Proof. Let $R_\delta = T_\delta A_\delta^\gamma (1-P_\delta)^{-1} A_\delta^{-\gamma}$. Then $(A_\delta + B_\delta)R_\delta x = x$ for all $x \in X$, since $T_\delta A_\delta + B_\delta T_\delta = 1$. The operator R_δ is a right inverse of $A_\delta + B_\delta$; therefore, $R_\delta = L_\delta$ for every $\delta \in (0, \delta_0)$, since L_δ is the left inverse of $A_\delta + B_\delta \in \mathcal{B}(X)$. Moreover,

$$\lim_{\delta\to 0^+} R_\delta x = \lim_{\delta\to 0^+} T_\delta A_\delta^\gamma (1-P_\delta)^{-1} A_\delta^{-\gamma} x = \overline{TA} A^{\gamma-1}(1-P)^{-1} A^{-\gamma} x = Rx, \ x \in X,$$

and hence

$$Rx = \lim_{\delta\to 0^+} R_\delta x = \lim_{\delta\to 0^+} L_\delta (A_\delta + B_\delta) R_\delta = \lim_{\delta\to 0^+} L_\delta x = Lx, \quad \text{for all } \ x \in X.$$

Thus $R = L$ and $R \in \mathcal{B}(X)$. Since L maps X into $D(A)$, R maps X into $D(A)$ as well. Since A is closed, we have

$$\lim_{\delta\to 0^+} A_\delta R_\delta x = ARx \quad \text{for all } \ x \in X,$$

and we know moreover that $(A_\delta + B_\delta)R_\delta x = x$ for all $x \in X$. Since B is closed, this implies $Rx \in D(B)$ and $(A+B)Rx = x$ for all $x \in X$. □

Let $c_0 = \min\{c_1, c_2\}$. The proof of Theorem 1 is now complete. □

5. L^1-Estimates for Scalar Resolvent Kernels

In this section we discuss the assumptions **(a)** and **(r)** concerning the kernel $a(t)$ for three special classes of kernels.

1) The first class of kernels consists of the functions

$$a(t) = t^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma), \quad t > 0, \ \text{where} \ \gamma \in (0,2). \tag{5.1}$$

The special case $\gamma = 1$ has been treated already in Section 3 and therefore we shall not pay particular attention to it here. The Laplace transform $\widehat{a}(\lambda)$ of $a(t)$ is then given by

$$\widehat{a}(\lambda) = \lambda^{-\gamma}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2}. \tag{5.2}$$

Thus one obtains $\widehat{a}(\lambda) \neq 0$ and

$$|\arg \widehat{a}(\lambda)| \le \gamma\pi/2 < \pi, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2},$$

as well as

$$-\lambda \widehat{a}'(\lambda)/\widehat{a}(\lambda) = \gamma, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2}.$$

This shows that assumption **(a)** is satisfied with $\vartheta_B = \gamma\pi/2$.

The Laplace transform $\widehat{r}_\mu$ of the resolvent kernel r_μ for $\mu > 0$ is given by

$$\widehat{r}_\mu(\lambda) = \frac{\widehat{a}(\lambda)}{1+\mu\widehat{a}(\lambda)} = \frac{1}{\mu + \lambda^\gamma}, \quad \lambda \in \Sigma_{\pi/2}. \tag{5.3}$$

The dilation property of the Laplace transform then implies

$$r_\mu(t) = |\mu|^{p-1} r_{e^{i\phi}}(|\mu|^p t), \quad t > 0,$$

where $\phi = \arg \mu$ and $p = 1/\gamma$. Therefore, we obtain the estimate

$$\begin{aligned} |t^\delta r_\mu|_1 &= \int_0^\infty t^\delta |r_\mu(t)| dt = |\mu|^{p-1} \int_0^\infty t^\delta |r_{e^{i\phi}}(|\mu|^p t)| dt \\ &= |\mu|^{-p\delta-1} \int_0^\infty t^\delta |r_{e^{i\phi}}(t)| dt = \frac{R(\delta,\phi)}{|\mu|^{1+\delta/\gamma}}, \end{aligned}$$

where

$$R(\delta,\phi)=\int_0^\infty t^\delta |r_{e^{i\phi}}(t)|dt.$$

Thus to prove **(r)** for the class of kernels under consideration we need to find bounds for $R(\delta,\phi)$. For this purpose choose any angle $\phi_0<\pi-\vartheta_B=\pi-\pi\gamma/2$, and let $\psi>\pi/2$ be such that $\gamma\psi<\pi-\phi_0$. Let Γ denote the contour

$$\begin{aligned}\Gamma &= (\infty,1/2]e^{-i\psi}\cup(e^{-i\psi}/2,e^{-i\pi}/2)\cup[e^{-i\pi}/2,0]\\ &\quad\cup[0,e^{i\pi}/2]\cup(e^{i\pi}/2,e^{i\psi}/2)\cup[1/2,\infty)e^{i\psi};\end{aligned}$$

then the function $g(\lambda)=e^{i\phi}+\lambda^\gamma$ is holomorphic to the right of Γ and all its possible zeros are to the left of this contour, for each $|\phi|\le\phi_0$. Therefore we may deform the integration path in the complex Laplace inversion formula for $r_{e^{i\phi}}$ to Γ. Since $|g(\lambda)|$ is nonzero and continuous on Γ and behaves like $|\lambda|^\gamma$ for large $|\lambda|$, by a simple calculation which takes into account the cancellations on the parts of Γ which are contained in the negative real half-line, one obtains the following estimate for $r_{e^{i\phi}}$:

$$|r_{e^{i\phi}}(t)|\le C\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\gamma}{1+r^{2\gamma}}\,dr,\qquad \text{for all } t>0,\ |\phi|\le\phi_0,$$

where $C>0$ denotes a constant which only depends on γ, ϕ_0, and ψ. But this then implies

$$R(\delta,\phi)\le C\int_0^\infty\int_0^\infty t^\delta e^{-rt}\frac{r^\gamma}{1+r^{2\gamma}}\,drdt=C\Gamma(1+\delta)\int_0^\infty\frac{r^{\gamma-\delta-1}}{1+r^{2\gamma}}\,dr<\infty,$$

for all $|\phi|\le\phi_0$, provided $\delta>-1$ and $|\delta|<\gamma$.

Let us summarize these results as

Proposition 4. *Let $\gamma\in(0,2)$, $|\delta|<\gamma$, $\delta>-1$, and consider the kernel $a(t)=t^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma)$, $t>0$. Then* **(a)** *is satisfied with $\vartheta_B=\pi\gamma/2$, and* **(r)** *holds with $\beta=\delta/\gamma$, for any $\varphi_B>\vartheta_B$.*

It is not difficult to see that for $\gamma\ne1$ the restrictions on δ in Proposition 4 are essential. In fact, contracting the contour Γ from the above proof to the negative real axis, one obtains the representation

$$r_1(t)=\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\gamma}{1+2r^\gamma\cos(\pi\gamma)+r^{2\gamma}}\,dr.$$

This representation shows that $r_1(t)>0$ for all $t>0$, and therefore by Fubini's theorem we have $t^\delta r_1(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ if and only if $|\delta|<\gamma$.

For the case $\gamma\in(1,2)$ the function $g(\lambda)=1+\lambda^\gamma$ has zeros at $\lambda=e^{\pm i\pi/\gamma}$; therefore, contracting the contour Γ to the negative real axis, we obtain by the residue theorem

$$\begin{aligned}r_1(t) &= \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt}\frac{r^\gamma}{1+2r^\gamma\cos(\pi\gamma)+r^{2\gamma}}\,dr\\ &\qquad -\frac{2}{\gamma}e^{t\cos(\pi/\gamma)}\cos[\pi/\gamma+t\sin(\pi/\gamma)].\end{aligned}$$

In this case $r_1(t)$ is no longer nonnegative; however, the second term in this representation has moments of all orders $\delta>-1$ in $L^1(\mathbf{R}_+)$, and the first term is negative for all $t>0$. Thus we see that for the case $\gamma\in(1,2)$, $t^\delta r_1\in L^1(\mathbf{R}_+)$ if and only if $-1<\delta<\gamma$.

Therefore the estimates in Proposition 4 are optimal.

2) Next we consider the case where $a(t)$ is a *completely positive function*, or equivalently $\Phi(\lambda) = 1/\widehat{a}(\lambda)$ is a *Bernstein function*, which means $\Phi(\lambda) > 0$ for $\lambda > 0$, and $\Phi'(\lambda)$ is completely monotonic on $(0, \infty)$; cf. Prüss [16] for these concepts, its properties, and implications for the evolutionary integral equation (3.1). For this class of kernels we have the following result.

Proposition 5. *Suppose $a(t)$ is a completely positive function. Then $|\arg \widehat{a}(\lambda)| \leq \pi/2$ on $\Sigma_{\pi/2}$, i.e. $\vartheta_B \leq \pi/2$, and the resolvent kernels r_μ are subject to the estimates*

$$|r_\mu|_1 \leq \frac{1}{\Phi_0 + \mathrm{Re}\ \mu} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ \mu}, \qquad \text{for all } \mu \in \Sigma_{\pi/2}, \tag{5.4}$$

and

$$|tr_\mu|_1 \leq \frac{\Phi_1}{(\Phi_0 + \mathrm{Re}\ \mu)^2} \leq \frac{\Phi_1}{(\mathrm{Re}\ \mu)^2}, \qquad \text{for all } \mu \in \Sigma_{\pi/2}, \tag{5.5}$$

where

$$\Phi_0 = \Phi(0+) = \frac{1}{\widehat{a}(0+)} \quad \text{and} \quad \Phi_1 = \Phi'(0+) = \frac{-\widehat{a}'(0+)}{\widehat{a}(0+)^2}.$$

In particular, if $\Phi_1 < \infty$, then **(r)** *holds with $\beta = \delta$, for each $\varphi_B > \pi/2$ and $\delta \in [0, 1]$.*

Proof. Consider $\mu > 0$, first. It is well-known that the resolvent kernels $r_\mu(t)$ are nonnegative. Therefore,

$$|r_\mu|_1 = \int_0^\infty r_\mu(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} r_\mu(t)\ dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{r}_\mu(\varepsilon),$$

and since $\widehat{r}_\mu(\lambda) = 1/(\Phi(\lambda) + \mu)$, we obtain

$$|r_\mu|_1 = \frac{1}{\Phi_0 + \mu} \quad \text{for all } \mu > 0.$$

This proves the first statement for positive μ.

In the same way we obtain

$$|tr_\mu|_1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\infty t e^{-\varepsilon t} r_\mu(t)\ dt = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \widehat{r}'_\mu(\varepsilon) = \frac{\Phi_1}{(\Phi_0 + \mu)^2},$$

which implies the second statement for $\mu > 0$.

Now let $\mu = \mu_0 + i\sigma$ be complex, $\mu_0 > 0$. Here we employ the *propagation function* $w(t; \tau)$ associated with $a(t)$, which is defined via the relation

$$\widehat{w}(\lambda; \tau) = \frac{1}{\lambda} e^{-\Phi(\lambda)\tau}, \qquad \text{for all } \lambda \in \Sigma_{\pi/2},\ \tau \geq 0.$$

It is well known that $w(t; \tau)$ is nonnegative, and nondecreasing w.r.t. t; cf. Prüss [16]. The identity

$$\widehat{r}_\mu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\mu\tau} e^{-\Phi(\lambda)\tau} d\tau$$

then implies

$$\int_t^{t+h} r_\mu(s) ds = \int_0^\infty e^{-\mu\tau} [w(t + h; \tau) - w(t; \tau)] d\tau, \quad t, h > 0,$$

and hence

$$\begin{aligned}\left|h^{-1}\int_t^{t+h} r_\mu(s)\ ds\right| &\leq h^{-1}\int_0^\infty e^{-\mu_0\tau}[w(t+h;\tau)-w(t;\tau)]\ d\tau\\ &= h^{-1}\int_t^{t+h} r_{\mu_0}(s)\ ds,\end{aligned}$$

for all $t, h > 0$. As $h \to 0^+$, the left hand side of this inequality converges to $|r_\mu|$ in $L^1_{loc}(\mathbf{R}_+)$ while the right hand side approaches r_{μ_0} in $L^1(\mathbf{R}_+)$; therefore Lebesgue's theorem yields $r_\mu \in L^1(\mathbf{R}_+)$, and $|r_\mu|_1 \leq |r_{\mu_0}|_1$. Thus the first statement holds for all $\mu \in \Sigma_{\pi/2}$. In the same way we obtain also $|tr_\mu|_1 \leq |tr_{\mu_0}|_1$ provided Φ_1 is finite, and so the second claim follows as well.

The last statement is proved by Hölder's inequality. For this purpose let $\delta \in [0,1]$, and let $p = 1/\delta$, $1/p + 1/q = 1$. Then

$$\begin{aligned}|t^\delta r_\mu|_1 &\leq |tr_\mu|_1^{1/p}|r_\mu|_1^{1/q}\\ &\leq [\frac{\Phi_1}{(\Phi_0+\text{Re }\mu)^2}]^{1/p}[\frac{1}{\Phi_0+\text{Re }\mu}]^{1/q}\\ &= \frac{\Phi_1^\delta}{(\Phi_0+\text{Re }\mu)^{1+\delta}}, \quad \text{for all } \mu\in\Sigma_{\pi/2},\ \delta\in[0,1].\end{aligned}$$

This implies **(r)** with $\beta = \delta$. □

Observe that condition **(a)** is not always satisfied when $a(t)$ is completely positive, since such kernels need not be 1-regular, in general. However, it was shown in Clément and Prüss [7] that the operator B as given in Section 3 is still well-defined, and that it generates a C_0-semigroup of contractions in $L^p(\mathbf{R}_+; Y)$ and admits bounded imaginary powers with power angle $\pi/2$. Therefore the results of Section 3 still remain valid, provided $\Phi_1 < \infty$. Completely monotonic kernels $a(t)$, in particular the kernels $a(t) = t^{\gamma-1}$, $\gamma \in (0,1]$, are completely positive. In particular, the considerations following Proposition 4 show that the condition $\Phi_1 < \infty$ in Proposition 5 cannot be omitted.

3) The third class of kernels we want to consider here is motivated by the theory of viscoelasticity; cf. Prüss [16]. These kernels are of the form

$$a(t) = a_0 + a_\infty t + \int_0^t a_1(s)ds, \quad t > 0, \tag{5.6}$$

where a_0, $a_\infty \geq 0$, and $a_1(t)$ is 3-monotone, i.e. nonnegative, nonincreasing, convex, $-\dot{a}(t)$ convex, with $\lim_{t\to\infty} a_1(t) = 0$. Of course, we are only interested in the nontrivial case $a(t) \not\equiv 0$.

For kernels of the form (5.6) it can be shown that their Laplace transforms extend continuously to $\mathbf{C}_+ \setminus \{0\}$ and that for the function

$$g(\lambda) = a_0 + a_\infty/\lambda + \widehat{a}_1(\lambda)$$

the following estimates hold; cf. Prüss [16], Appendix to Section 3.

$$c_1 a(1/\rho) \le |g(i\rho)| \le C_1 a(1/\rho), \quad \rho > 0; \tag{5.7}$$

$$c_2\left[a_0 + \int_0^{1/\rho} -t\dot{a}_1(t)dt\right] \le \mathrm{Re}\ g(i\rho) \le C_2\left[a_0 + \int_0^{1/\rho} -t\dot{a}_1(t)dt\right], \quad \rho > 0; \tag{5.8}$$

$$c_3\left[\frac{a_\infty}{\rho} + \rho\int_0^{1/\rho} ta_1(t)dt\right] \le -\mathrm{Im}\, g(i\rho) \le C_3\left[\frac{a_\infty}{\rho} + \rho\int_0^{1/\rho} ta_1(t)dt\right]; \tag{5.9}$$

$$|g^{(n)}(i\rho)| \le C_4\left[\frac{a_\infty}{2\rho^{n+1}} + \int_0^{1/\rho} t^n a_1(t)dt\right], \quad \rho > 0,\ n = 0, 1, 2. \tag{5.10}$$

Here c_i and C_i are universal constants. These estimates are well-known as the *Shea-Wainger estimates*. Replacing $a_\infty + a_1(t)$ by $(a_\infty + a_1(t))e^{-\sigma t}$, $\sigma \ge 0$, estimates (5.8), (5.7) and (5.10) show that Re $g(\lambda) > 0$ and

$$|\lambda g'(\lambda)/g(\lambda)| \le C_5, \quad \text{for all Re } \lambda \ge 0. \tag{5.11}$$

In particular $a(t)$ is 1-regular, and $\widehat{a}(\lambda)$ is never negative real nor zero, provided $a(t) \not\equiv a_\infty t$. Thus **(a)** holds with $\vartheta_B \le \pi$. More precisely, estimates (5.8) and (5.9) yield $\vartheta_B < \pi$ if and only if

$$\limsup_{t\to 0,\infty} \frac{ta_\infty/2 + t^{-1}\int_0^t sa_1(s)ds}{a_0 + \int_0^t -s\dot{a}_1(s)ds} < \infty. \tag{5.12}$$

This condition implies $a_0 > 0$ or $a_1(0+) = \infty$ (for the limit $t \to 0$), and $a_\infty = 0$ (for the limit $t \to \infty$). It is implied by $a_\infty = 0$ and $a_1 \in L^1(\mathbf{R}_+)$, or by $a_\infty = 0$ and $\liminf_{t\to\infty} -t\dot{a}_1(t)/a_1(t) > 0$ (for $t \to \infty$), and by $a_0 > 0$, or by $\liminf_{t\to 0} -t\dot{a}_1(t)/a_1(t) > 0$ (for $t \to 0$). $a_1(t) = t^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma)$ with $\gamma \in (0,1)$ is a typical example with these properties.

We are now in position to state our result on kernels of the form (5.6).

Proposition 6. *Let $a(t)$ be a kernel of the form* (5.6) *where $a_0 \ge 0$, $a_\infty = 0$, $a_1(t)$ 3-monotone with $\lim_{t\to\infty} a_1(t) = 0$, and assume* (5.12).

Then (**a**) *is satisfied for some $\vartheta_B < \pi$ and the resolvent kernels r_μ are subject to the estimates*

$$|r_\mu|_1 \le \frac{C}{|\mu|}, \quad \textit{for all } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}, \tag{5.13}$$

and with $\rho_0 = 2\vartheta_B/\pi$

$$|tr_\mu|_1 \le \frac{C}{|\mu|^{1+1/\rho_0}}, \quad \textit{for all } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}, \tag{5.14}$$

where $\varphi_B > \vartheta_B$ is arbitrary, and C denotes a constant depending only on φ_B. Moreover,

$$|t^\delta r_\mu|_1 \le \frac{C}{|\mu|^{1+\delta/\rho_0}}, \quad \textit{for all } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}, \tag{5.15}$$

for each $\delta \in [0,1]$.

Proof. The proof is based on *Hardy's inequality* (cf. Duren [12]), which is stated as

Lemma 9. *Suppose $f : \mathbf{C}_+ \to \mathbf{C}$ is a bounded holomorphic function on the right half-plane such that f' belongs to the Hardy space $H^1(\mathbf{C}_+)$.*

Then there is a function $b \in L^1(\mathbf{R}_+)$ such that $\widehat{b}(\lambda) = f(\lambda)$ for all Re $\lambda > 0$, *and $|b|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{2}|f'|_{H^1(\mathbb{C}_+)}$.*

For the Laplace transform of the resolvent kernel r_μ we obtain

$$\widehat{r}_\mu(\lambda) = \frac{1}{\mu + 1/\widehat{a}(\lambda)} = \frac{g(\lambda)}{\lambda + \mu g(\lambda)}, \quad \text{Re } \lambda > 0.$$

By assumption (5.12) we have $\vartheta_B < \pi$. Fix any $\varphi_B \in (\vartheta_B, \pi)$; then there is a constant $C > 0$ such that

$$|\lambda + \mu g(\lambda)| \geq C^{-1}[|\lambda| + |\mu||g(\lambda)|], \quad \text{for all Re } \lambda \geq 0,\ \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}. \tag{5.16}$$

This implies

$$|\widehat{r}_\mu(\lambda)| \leq C\frac{|g(\lambda)|}{|\lambda| + |\mu||g(\lambda)|} \leq \frac{C}{|\mu|}, \quad \text{for all Re } \lambda \geq 0,\ \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B},$$

which means that $h_\mu = \widehat{r}_\mu$ is bounded and holomorphic on the right half-plane. For the derivative of h_μ we obtain

$$h'_\mu = \frac{\lambda g'(\lambda) - g(\lambda)}{(\lambda + \mu g(\lambda))^2}.$$

Hence by (5.11) we obtain

$$|h'_\mu(\lambda)| \leq C^2(1 + C_5)\frac{|g(\lambda)|}{(|\lambda| + |\mu||g(\lambda)|)^2},$$

and therefore

$$\begin{aligned} |h'_\mu|_{H^1(\mathbb{C}_+)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |h'_\mu(i\rho)|d\rho \leq C_6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(i\rho)|}{(|\rho| + |\mu||g(i\rho)|)^2}\, d\rho \\ &\leq C_7 \int_0^{\infty} \frac{a(1/\rho)}{(\rho + |\mu|a(1/\rho))^2}\, d\rho = C_7 \int_0^{\infty} \frac{a(s)}{(1 + s|\mu|a(s))^2}\, ds, \end{aligned}$$

where we employed estimates (5.7). The function $a(s)$ is nondecreasing, which implies the inequality

$$\frac{d}{ds}(sa(s)) = a(s) + s\dot{a}(s) \geq a(s), \quad s > 0,$$

and therefore

$$\begin{aligned} |h'_\mu|_{H^1(\mathbb{C}_+)} &\leq C_7 \int_0^{\infty} \frac{a(s)}{(1 + s|\mu|a(s))^2}\, ds \\ &\leq C_7 \int_0^{\infty} \frac{d(sa(s))/ds}{(1 + |\mu|sa(s))^2}\, ds \\ &= C_7 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + |\mu|r)^2}\, dr = \frac{C_7}{|\mu|}. \end{aligned}$$

By uniqueness of the Laplace transform, Lemma 7 then implies $r_\mu \in L^1(\mathbf{R}_+)$ and $|r_\mu|_1 \leq C_7/2|\mu|$, for all $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi}$. This proves (5.13).

To prove the second estimate (5.14) we proceed similarly. It is easy to see that h'_μ is bounded on $\mathbf{C}_+$, and by uniqueness of the Laplace transform we have

$h'_\mu(\lambda) = -\widehat{tr}_\mu(\lambda)$ on the open right half-plane. Therefore, by Lemma 7 it is sufficient to estimate h''_μ in the Hardy space $H^1(\mathbf{C}_+)$. We have

$$h''_\mu(\lambda) = \frac{\lambda g''(\lambda)}{(\lambda+\mu g(\lambda))^2} - 2\left[\frac{\lambda g'(\lambda)}{g(\lambda)} - 1\right]\frac{g(\lambda)+\mu g(\lambda)g'(\lambda)}{(\lambda+\mu g(\lambda)^3};$$

hence (5.11) and (5.16) yield

$$|h''_\mu(\lambda)| \le C_8\ \frac{|\lambda g''(\lambda)| + |g'(\lambda)| + 1/|\mu|}{(|\lambda| + |\mu||g(\lambda)|)^2}.$$

Therefore, with $\psi(s) = \int_0^s ta_1(t)dt$ and with (5.10) we obtain

$$|\rho g''(i\rho)| \le C_4|\rho| \int_0^{1/|\rho|} t^2 a_1(t)dt \le C_4\psi(1/|\rho|).$$

This then implies

$$\begin{aligned}
|h''_\mu|_{H^1(\mathbb{C}_+)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |h''_\mu(i\rho)|d\rho \le C_9 \int_0^\infty \frac{\psi(1/\rho) + 1/|\mu|}{(\rho + |\mu|a(1/\rho))^2}\ d\rho \\
&= C_9\left[\int_0^\infty \frac{\psi(s)}{(1+|\mu|sa(s))^2}\ ds + |\mu|^{-1}\int_0^\infty \frac{1}{(1+|\mu|sa(s))^2}\ ds\right] \\
&= C_9[I_1 + I_2/|\mu|].
\end{aligned}$$

Hence it remains to obtain bounds for the integrals I_1 and I_2.

(i) To estimate the first part of I_1, observe that $\psi(s) \le sa(s) \le sd(sa(s))/ds$; therefore an integration by parts and $a(s) \ge s\dot{a}(s)$ yield, with some $\varepsilon > 0$ which will be chosen later,

$$\begin{aligned}
\int_0^\varepsilon \frac{\psi(s)}{(1+|\mu|sa(s))^2}\ ds &\le \int_0^\varepsilon \frac{d(sa(s))/ds}{(1+|\mu|sa(s))^2}\ s\ ds \\
&= -\left.\frac{s}{|\mu|(1+|\mu|sa(s))}\right|_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{1}{|\mu|(1+|\mu|sa(s))}\ ds \\
&\le \frac{\varepsilon}{|\mu|}.
\end{aligned}$$

(ii) The remaining part of I_1 is estimated also via an integration by parts as follows:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^\infty \frac{\psi(s)}{(1+|\mu|sa(s))^2}\ ds &\le \int_\varepsilon^\infty \frac{\psi(s)}{(|\mu|a(s))^2}\ \frac{ds}{s^2} \\
&= -\left.\frac{\psi(s)}{s|\mu|^2a(s)^2}\right|_\varepsilon^\infty + \int_\varepsilon^\infty \frac{\dot{\psi}(s)a(s) - 2\psi(s)\dot{a}(s)}{|\mu|^2a(s)^3s}\ ds \\
&\le \frac{\psi(\varepsilon)}{\varepsilon|\mu|^2a(\varepsilon)^2} + \int_\varepsilon^\infty \frac{s\dot{a}(s)}{s|\mu|^2a(s)^2}\ ds \\
&= \frac{\psi(\varepsilon)/\varepsilon + a(\varepsilon)}{|\mu|^2a(\varepsilon)^2} \le \frac{2}{|\mu|^2a(\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Combining (i) and (ii), we arrive at

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{|\mu|}\left[1 + \frac{2}{|\mu|\varepsilon a(\varepsilon)}\right], \qquad \text{for all } \mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_B}.$$

(iii) To obtain an appropriate bound for I_2 we proceed as follows:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+|\mu|sa(s))^2}\,ds \le \varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{(|\mu|sa(s))^2}\,ds \\ &\le \varepsilon + \frac{1}{|\mu|^2 a(\varepsilon)^2}\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s^2} = \varepsilon\left[1+\frac{1}{|\mu|^2(\varepsilon a(\varepsilon))^2}\right]. \end{aligned}$$

As s runs from 0 to ∞, the function $s \mapsto sa(s)$ is strictly increasing from 0 to ∞; therefore there is a unique value of s, say $\varepsilon > 0$, such that $\varepsilon a(\varepsilon) = 1/|\mu|$. This implies $I_1 \le 3\varepsilon/|\mu|$ and $I_2 \le 2\varepsilon$; hence

$$|h''_\mu|_{H^1(\mathbb{C}_+)} \le 5C_9\,\frac{\varepsilon}{|\mu|}.$$

To estimate ε in terms of $|\mu|$ we employ (5.7) and (3.6):

$$\begin{aligned} |\mu|^{-1} &= \varepsilon a(\varepsilon) \ge c_1|g(i/\varepsilon)|\varepsilon = c_1|\widehat{a}(i/\varepsilon)| \\ &\ge c_2\widehat{a}(1/\varepsilon) \ge c_3\varepsilon^{\rho_0}; \end{aligned}$$

hence $\varepsilon \le c_4|\mu|^{-1/\rho_0}$. This completes the proof of (5.14). The last statement follows from interpolation, as in the proof of Proposition 5. □

6. Application to Parabolic Partial Differential and Integro-Differential Equations

In this section we want to apply Theorem 2 and Corollary 3 to parabolic partial differential and integro-differential equations of second order in space. For this purpose, let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with boundary $\partial\Omega$ of class C^2. Consider the problem

$$\left\{\begin{array}{c} u(t,x) + \displaystyle\int_0^t a(t-s)\{\nu u(s,x) - \operatorname{div}[b(s,x)\nabla u(s,x)] - f(s,x)\}ds = 0, \\ t \ge 0,\ x \in \Omega, \\ n(x)\cdot(b(t,x)\nabla u(t,x)) = 0, \quad t \ge 0,\ x \in \Gamma_1, \\ u(t,x) = 0, \qquad t \ge 0,\ x \in \Gamma_0, \end{array}\right. \tag{6.1}$$

where $\Gamma_j \subset \partial\Omega$ are open and closed in $\partial\Omega$, such that $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_0 = \partial\Omega$, and $n(x)$ denotes the outer normal of Ω at $x \in \partial\Omega$. Denoting the space of symmetric real $n \times n$ matrices by $\mathrm{Sym}(n)$, $b : \mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega} \to \mathrm{Sym}(n)$ is assumed at least to be continuous with bounded partial derivatives w.r.t. $x \in \Omega$, and to be uniformly positive definite in the sense that there exists a constant $b_0 > 0$ such that

$$b_0|\xi|^2 \le \xi\cdot b(t,x)\xi \le b_0^{-1}|\xi|^2 \quad \text{for all } t \ge 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{6.2}$$

Concerning the kernel $a(t)$ we assume that it belongs to one of the three classes studied in Section 5, in particular, $a(t) = 1$ arises as a special case; this case corresponds to the boundary value problem

$$\left\{\begin{array}{l} u_t(t,x) + \nu u(t,x) = \operatorname{div}[b(t,x)\nabla u(t,x)] - f(t,x), \quad t \ge 0,\ x \in \Omega, \\ n(x)\cdot(b(t,x)\nabla u(t,x)) = 0, \quad t \ge 0,\ x \in \Gamma_1, \\ u(t,x) = 0, \quad t \ge 0,\ x \in \Gamma_0, \qquad u(0,x) = 0, \quad x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{6.3}$$

The family $\{L(t)\}_{t\ge 0}$ will be the L^q-realizations of the underlying elliptic boundary value problems; more precisely, we define

$$\left\{\begin{array}{l} (L(t)u)(x) = -\operatorname{div}[b(t,x)\nabla u(x)], \quad t \ge 0,\ x \in \Omega, \\ D(L(t)) = \{u \in H^{2,q}(\Omega) :\ u|_{\Gamma_0} = 0,\ n\cdot b(t,\cdot)\nabla u|_{\Gamma_1} = 0\}, \end{array}\right. \tag{6.4}$$

where the boundary values of u and ∇u are understood in the sense of traces. Thus as the base space Y we choose $Y = L^q(\Omega)$ with $1 < q < \infty$, which is well-known to be of class $\mathcal{HT}$. Then (6.1) and (6.3) written in abstract form become (3.1) and (3.2), respectively. Observe that in case $\Gamma_1 \neq \emptyset$ and b is not constant in time, the domains $D(L(t))$ are not constant. The norm in $H^{s,q}(\Omega)$ will be denoted by $|\cdot|_{s,q}$, and that of $L^q(\Omega)$ by $|\cdot|_q$.

It is well-known (see e.g. Lunardi [15], Chap. 3) that the operators $L(t)$ are sectorial with spectral angle $\phi_{L(t)} = 0$, and for each $\varphi_A \in (0, \pi)$ there is a constant $M_A > 0$ such that

$$|(\lambda + L(t))^{-1}| \leq \frac{M_A}{1+|\lambda|}, \quad t \geq 0,\ \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}, \tag{6.5}$$

and

$$|L(t)^{-1}g|_{2,q} \leq M_A'|g|_q, \quad t \geq 0,\ g \in L^q(\Omega), \tag{6.6}$$

except for the case of the pure Neumann problem $\Gamma_0 = 0$, where the kernels of $L(t)$ are nontrivial. For the sake of simplicity we exclude this case and assume from now on that $\Gamma_0 \neq \emptyset$.

If $q = 2$ it is also well-known that $L(t)$ is selfadjoint and positive definite, hence admits bounded imaginary powers and

$$|L(t)^{is}|_2 = 1, \qquad \text{for all } t \geq 0,\ s \in \mathbf{R}; \tag{6.7}$$

cf. e.g. Prüss and Sohr [17], Example 1.

If $q \neq 2$ but $\Gamma_1 = \emptyset$, it has been shown in Prüss and Sohr [18] that $L(t)$ admits bounded imaginary powers in $L^q(\Omega)$ and that for each $\varphi_A \in (0, \pi)$ there is a constant $K_A > 0$ such that

$$|L(t)^{is}|_q = K_A e^{\varphi_A|s|}, \qquad \text{for all } t \geq 0,\ s \in \mathbf{R}; \tag{6.8}$$

in particular $\theta_{L(t)} = 0$.

If $q \neq 2$ and Γ_1 is arbitrary, Duong [10] obtained $L(t) \in BIP(L^q(\Omega))$ and

$$|L(t)^{is}|_q = K_A e^{|s|\pi/2}, \qquad \text{for all } t \geq 0,\ s \in \mathbf{R}. \tag{6.9}$$

By interpolation with (6.7) this estimate can be improved to $\theta_{L(t)} \leq |1 - 2/q|\pi/2$, and for each $\varphi_A > |1 - 2/q|\pi/2$ there is a constant $K_A > 0$ such that (6.8) is valid. More recently Duong and Robinson [11] claim (6.8) for each $\varphi_A > 0$. This completes the verification of **(L)** for the class of operator families $\{L(t)\}_{t\geq 0}$ given by (6.4).

To verify the commutator condition **(C)** we use an argument which is similar to that employed by Acquistapace [1]. Let a function $g \in L^q(\Omega)$ be given, and define $f = (\lambda + L(s))L(s)^{-1}g$, $u = (\lambda + L(t))^{-1}f$, and $v = (\lambda + L(s))^{-1}f$. Then with the notation $\mathcal{L}(t) = -\mathrm{div}[b(t, \cdot)\nabla]$ and $\mathcal{B}(t) = n \cdot [b(t, \cdot)\nabla]$ we have

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda u + \mathcal{L}(t)u = f & \text{on } \Omega \\ \mathcal{B}(t)u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda v + \mathcal{L}(s)v = f & \text{on } \Omega \\ \mathcal{B}(s)v = 0 & \text{on } \Gamma_1 \\ v = 0 & \text{on } \Gamma_0 \end{array} \right\}.$$

Therefore $w = u - v$ solves the boundary value problem

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda w + \mathcal{L}(t)w = (\mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(t))v & \text{on} & \Omega, \\ \mathcal{B}(t)w = (\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(t))v & \text{on} & \Gamma_1, \\ w = 0 & \text{on} & \Gamma_0, \end{array} \right.$$

and hence can be written as

$$w = (\lambda + L(t))^{-1}(\mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(t))v + S_\lambda(t)(\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(t))v,$$

where the so-called *Dirichlet map* $S_\lambda(t)$ is defined according to

$$S_\lambda(t)\varphi = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda z + \mathcal{L}(t)z = 0 & \text{on } \Omega, \\ \mathcal{B}(t)z = \varphi & \text{on } \Gamma_1, \\ z = 0 & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Since $v = (\lambda + L(s))^{-1}f = L(s)^{-1}g$ we finally obtain the following representation for the commutator $C(t,s,\lambda) = L(t)(\lambda + L(t))^{-1}[L(t)^{-1} - L(s)^{-1}]$:

$$C(t,s,\lambda)g = (\lambda + L(t))^{-1}(\mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(t))L(s)^{-1}g + S_\lambda(t)(\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(t))L(s)^{-1}g, \tag{6.11}$$

for all $t, s \geq 0$, $\lambda \in \Sigma_{\pi - \varphi_A}$. The first term in this representation is estimated easily. In fact, suppose $b(\cdot, x)$ and $b_{x_j}(\cdot, x)$ belong to $C^\delta(\mathbf{R}_+)$ uniformly w.r.t. $x \in \Omega$, for some $\delta > 0$. Then

$$|(\mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(t))u|_q \leq C_1|t-s|^\delta |u|_{2,q}, \quad t, s \geq 0, \; u \in H^{2,q}(\Omega).$$

By (6.5) this implies

$$|(\lambda + L(t))^{-1}(\mathcal{L}(s) - \mathcal{L}(t))L(s)^{-1}g|_q \leq \frac{M_A}{1+|\lambda|}\; C_1|t-s|^\delta M'_A|g|_q, \tag{6.12}$$

for all $t, s \geq 0$, and $g \in L^q(\Omega)$. Concerning the second term on the right hand side of (6.11), we first refer to Triebel [21] for the following estimate of the Dirichlet map:

$$|S_\lambda(t)\varphi|_q \leq C_q \left[\frac{|\widetilde{\varphi}|_q}{(1+|\lambda|)^{1/2}} + \frac{|\nabla\widetilde{\varphi}|_q}{1+|\lambda|}\right], \tag{6.13}$$

where $\widetilde{\varphi}$ denotes any extension of φ to Ω in the sense that $\widetilde{\varphi} = \varphi$ on Γ_1 ; C_q is independent of $t \geq 0$. Fix any extension $\widetilde{n}$ of the outer normal field $n(x)$ to Ω which is of class C^1. Then by (6.13) we have

$$\begin{aligned} |S_\lambda(t)(\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(t))L(s)^{-1}g|_q \leq C_q[&(1+|\lambda|)^{-1/2}|(\widetilde{\mathcal{B}}(s) - \widetilde{\mathcal{B}}(t))L(s)^{-1}g|_q \\ &+ (1+|\lambda|)^{-1}|\nabla(\widetilde{\mathcal{B}}(s) - \widetilde{\mathcal{B}}(t))L(s)^{-1}g|_q], \end{aligned}$$

where $\widetilde{\mathcal{B}}(t) = \widetilde{n}(x) \cdot (b(t,x)\nabla)$. Then

$$\begin{aligned} |(\widetilde{\mathcal{B}}(s) - \widetilde{\mathcal{B}}(t))L(s)^{-1}g|_q &\leq |\widetilde{n}|_\infty \sup_{x\in\Omega}|b(t,x) - b(s,x)||\nabla L(s)^{-1}g|_q \\ &\leq |\widetilde{n}|_\infty |b|_\delta |t-s|^\delta M'_A|g|_q \\ &= C_2|t-s|^\delta |g|_q, \end{aligned}$$

where $|b|_\delta = \sup\{|b(t,x) - b(s,x)||t-s|^{-\delta} : \; t,s \geq 0, t \neq s, x \in \Omega\}$. Similarly, if b_{x_j} are also uniformly Hölder-continuous in t, we obtain

$$\begin{aligned} |\nabla(\widetilde{\mathcal{B}}(s) - \widetilde{\mathcal{B}}(t))L(s)^{-1}g|_q \leq\; & |\widetilde{n}|_\infty \sup_{x\in\Omega}|b(t,x) - b(s,x)||\nabla^2 L(s)^{-1}g|_q \\ & + |\widetilde{n}|_\infty \sup_{x\in\Omega}|\nabla\cdot(b(t,x) - b(s,x))||\nabla L(s)^{-1}g|_q \\ & + |\nabla\cdot\widetilde{n}|_\infty \sup_{x\in\Omega}|b(t,x) - b(s,x)||\nabla L(s)^{-1}g|_q \\ \leq\; & C_3|t-s|^\delta |g|_q. \end{aligned}$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
|S_\lambda(t)(\mathcal{B}(s)-\mathcal{B}(t))L(s)^{-1}g|_q &\leq C_q\left[\frac{C_2}{(1+|\lambda|)^{1/2}}+\frac{C_3}{1+|\lambda|}\right]|t-s|^\delta|g|_q \\
&\leq \frac{C_4|t-s|^\delta}{(1+|\lambda|)^{1/2}}|g|_q. \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

Combining estimates (6.12) and (6.14), we arrive at

$$
|C(t,s,\lambda)|_q \leq C_5\frac{|t-s|^\delta}{(1+|\lambda|)^{1/2}}, \quad \text{for all } t,s\geq 0,\ \lambda\in\Sigma_{\pi-\varphi_A}, \qquad (6.15)
$$

which shows that the commutator condition **(C)** holds with $\alpha = 1/2$, $\varphi_A > 0$ arbitrary, and $\delta > 0$, provided $b(\cdot,x), b_{x_j}(\cdot,x) \in C^\delta(\mathbf{R}_+)$ uniformly for $x \in \Omega$. Observe that for the case of Dirichlet boundary conditions $\Gamma_1 = \emptyset$, α can be chosen as $\alpha = 0$.

We are now in position to apply Theorem 2 and Corollary 3 and obtain the following result.

Theorem 3. *Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with boundary $\partial\Omega$ of class C^2, $\Gamma_j \subset \partial\Omega$ open and closed in $\partial\Omega$ such that $\Gamma_1\cap\Gamma_0=\emptyset$, $\Gamma_1\cup\Gamma_0=\partial\Omega$, and $\Gamma_0\neq\emptyset$. Assume that $b:\mathbf{R}_+\times\overline{\Omega}\to\mathrm{Sym}(n)$ satisfies the strong ellipticity condition* (6.2) *and $b, b_{x_j}\in C^\delta(\mathbf{R}_+;C(\overline{\Omega}))$, for some $\delta>0$. Let $p,q\in(1,\infty)$, $J=[0,T]$, or $J=\mathbf{R}_+$ but $\nu>0$ sufficiently large.*

Then for every $f\in L^p(J;L^q(\Omega))$, problem (6.1) *admits a unique solution $u\in L^p(J;H^{2,q}(\Omega))$, provided the kernel $a(t)$ satisfies one of the following conditions*:

(i) $a(t)=t^{\gamma-1}/\Gamma(\gamma)$, $\gamma\in(0,2)$, $\delta>\gamma/2$.

(ii) $a(t)$ is completely positive, $-\widehat{a}'(0+)/\widehat{a}(0+)^2<\infty$, $\delta>1/2$.

(iii) $a(t)$ is as in Proposition 6 *and $\delta>\rho_0/2$.*

In addition, if $\limsup_{r\to\infty}|\widehat{a}(r)|r^\rho<\infty$, then the solution u of (3.1) *belongs to $H_0^{\rho,p}(J;L^q(\Omega))$.*

It is clear from the derivations in this section that Theorem 3 can be generalized to other types of elliptic operators $\mathcal{L}(t)$ if only the relevant estimates for the resolvent, for the Dirichlet map, and for the imaginary powers of $\mathcal{L}(t)$ are valid, and the parabolicity condition is satisfied. These subjects as well as applications to quasilinear problems will be taken up in the near future.

References

1. P. Acquistapace. Evolution operators and strong solutions of abstract linear parabolic equations. *Diff. Int. Equations*, 1:433-457, 1988. MR 0b:34094
2. P. Acquistapace and B. Terreni. A unified approach to abstract linear non-autonomous parabolic equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 78:47-107, 1987. MR 8 e:34099
3. J.B. Baillon and Ph. Clément. Examples of unbounded imaginary powers of operators. *J. Funct. Anal.*, 100:419–434, 1991. MR 2j:47036
4. J. Bourgain. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ark. Mat.*, 22:163-168, 1983. MR 85a:46011
5. J. Bourgain. Vector-valued singular integrals and the H^1-*BMO* duality. In D. Burkholder, editor, *Probability Theory and Harmonic Analysis*, pages 1-19, New-York, 1986. Marcel Dekker. MR 89j:42049b
6. D.L. Burkholder. Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. In G. Letta and M. Pratelli, editors, *Probability and Analysis*, volume 1206 of *Lect. Notes Math.*, pages 61–108, Berlin, 1986. Springer Verlag. MR 88c:42017
7. Ph. Clément and J. Prüss. Completely positive measures and Feller semigroups. *Math. Ann.*, 287:73–105, 1990. MR 1d:45011

8. G. Da Prato and P. Grisvard. Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationelles. *J. Math. Pures Appl.*, 54:305–387, 1975. MR **56**:1129
9. G. Dore and A. Venni. On the closedness of the sum of two closed operators. *Math. Z.*, 196:189–201, 1987. MR **88m**:47072
10. X. T. Duong. H_∞- functional calculus for second order elliptic partial differential operators on L^p-spaces. In I. Doust, B. Jefferies, C. Li, and A. McIntosh, editors, *Operators in Analysis*, pages 91-102, Sydney, 1989. Australian National University. MR **1m**:35072
11. X. T. Duong and D. W. Robinson. Gaussian bounds, Brownian estimates and H_∞-functional calculus. Preprint, 1994.
12. P.L. Duren. *Theory of H^p Spaces*, volume 38 of *Pure Appl. Math.* Acad. Press, New York, 1970. MR **42**:3552
13. M. Fuhrmann. Sums of linear operators of parabolic type : a priori estimates and strong solutions. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 164:229-257, 1993.
14. R. Labbas and B. Terreni. Somme d'opérateurs linéaires de type parabolique. *Boll. Un. Mat. Ital.*, (7) 1-B:545-569, 1987. MR **8 g**:47016
15. A. Lunardi. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Birkhäuser-Verlag, Basel, 1995. MR **6e**:47039
16. J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. MR **4h**:45010
17. J. Prüss and H. Sohr. On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces. *Math. Z.*, 203:429–452, 1990. MR **1b**:47030
18. J. Prüss and H. Sohr. Boundedness of imaginary powers of second-order elliptic differential operators in L^p. *Hiroshima Math. J.*, 23:161-192, 1993. MR **4d**:47051
19. P.E. Sobolevskii. On equations of parabolic type. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 49:1–62, 1965. MR **25**:5297
20. H. Tanabe. *Equations of Evolution*, volume 6 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, London, 1979. MR **82g**:47032
21. H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. North Holland, Amsterdam, 1978. MR **80i**:46032
22. F. Zimmermann. On vector-valued Fourier multiplier theorems. *Studia Math.*, 93:201-222, 1989. MR **1b**:46031

Mathematik V, Universität Ulm, D-89069 Ulm, Germany
E-mail address: monniaux@mathematik.uni-ulm.de

Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther- Universität Halle-Wittenberg, Theodor-Lieser-Str. 5, D-06120 Halle, Germany
E-mail address: anokd@volterra.mathematik.uni-halle.de

Bibliographie

[AEH95] W. Arendt, O. ElMennaoui, and M. Hieber. Boundary values of holomorphic semigroups. à paraître, 1995.

[Ama95] H. Amann. *Linear and quasilinear parabolic problems.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[BC91] J. B. Baillon and Ph. Clément. Examples of unbounded imaginary powers of operators. *J. Funct. Anal.*, 100 :419–434, 1991.

[Bou83] J. Bourgain. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. *Ark. Math.*, 22 :163–168, 1983.

[Bou86] J. Bourgain. Vector-valued singular integrals and the $H^1 - BMO$ duality. In D. Burkholder, editor, *Probability theory and harmonic analysis*, pages 1–19. Marcel Dekker, New-York, 1986.

[Bur86] D. L. Burkholder. Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. In G. Letta and M. Pratelli, editors, *Probability and analysis*, volume 1206 of *Lect. Notes Math.*, pages 61–108. Springer Verlag, Berlin, 1986.

[CdP91] Ph. Clément and B. de Pagter. Some remarks on the Banach space valued Hilbert transform. *Indag. Math.*, 2(4) :453–460, 1991.

[CZ76a] I. Ciorănescu and L. Zsidó. Analytic generators for one-parameter groups. *Tohoku Math. J.*, 28 :327–362, 1976.

[CZ76b] I. Ciorănescu and L. Zsidó. On spectral subspaces of some unbounded groups of operators. *Revue Roum. Math. Pures et Appl.*, 21 :817–850, 1976.

[Dav80] E. B. Davies. *One-parameter semigroups.* Academic Press, London, 1980.

[DG75] G. DaPrato and P. Grisvard. Somme d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. *J. Math. Pures et Appl.*, 54 :305–387, 1975.

[Dur70] P. L. Duren. *Theory of H^p spaces*, volume 38 of *Pure and Appl. Math.* Academic Press, New-York, 1970.

[DV87] G. Dore and A. Venni. On the closedness of the sum of two closed operators. *Math. Z.*, 196 :189–201, 1987.

[DV90] G. Dore and A. Venni. Some results about complex powers of closed operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 149 :124–136, 1990.

[ElM92] O. ElMennaoui. *Trace des semi-groupes holomorphes singuliers à l'origine et comportement asymptotique.* PhD thesis, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1992.

[HP57] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semigroups*, volume XXXI of *Am. Math. Soc. Coll. Publ.* Am. Math. Soc., Providence, R. I., 1957.

[Kom66] H. Komatsu. Fractional powers of operators. *Pacific J. Math.*, 9 :285–346, 1966.

[Lun95] A. Lunardi. *Analytic semigroups and parabolic evolution equations in spaces of continuous functions.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[Nag85] R. Nagel, editor. *One-parameter semigroups of positive operators*, volume 1184 of *Lect. Notes Math.* Springer, Berlin, 1985.

[Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Appl. Math. Sc.* Springer Verlag, New-York, 1983.

[Prü93] J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[PS90] J. Prüss and H. Sohr. On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces. *Math. Z.*, 203 :429–452, 1990.

[RS75] M. Reed and B. Simon. *Fourier analysis, self-adjointness.* Methods of modern Math. Phys. Academic Press, London, 1975.

[Tri78] H. Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* North Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, 1978.

[Van75] A. VanDaele. On the spectrum of the analytic generator. *Math. Scand.*, 37 :307–318, 1975.

[Zsi74] L. Zsidó. Analytic generators and the foundation of the Tomita-Takesaki theory. *Proc. Int. School Math. Phys.*, pages 182–267, 1974. Univ. Camerino, Sept. 30 - Oct. 12.

[Zsi76] L. Zsidó. Hardy spaces associated to one-parameter groups (of *-automorphisms). *Inst. Nazionale di Alta Mat., Symp. Math.*, XX :169–177, 1976.

[Zsi77] L. Zsidó. Spectral and ergodic properties of the analytic generators. *J. Appr. Theory*, 20 :77–138, 1977.

[Zsi80] L. Zsidó. On spectral subspaces associated to locally compact abelian groups of operators. *Adv. in Math.*, 36 :213–276, 1980.

[Zsi83] L. Zsidó. Spectral properties of the analytic generator and singular integrals. *Mem. Acad. Lincei*, 17 :105–134, 1983.