Optimisation.

Université Aix-Marseille

Préparation à l'agrégation (Option B)

2020/2021

Thomas Ourmières-Bonafos

Table des matières

1 Introduction

1.1 Extrait du programme de l'agrégation externe 2020

Avant de commencer, on prendra connaissance du programme de l'agrégation externe, qui détaille les notions à maîtriser concernant les problèmes d'optimisation (voir Figure 1.1).

(f) Optimisation et approximation

Interpolation linéaire par morceaux. Interpolation de LAGRANGE.

Extremums des fonctions réelles de n variables réelles sans contraintes : mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas constant. Mise en œuvre de l'algorithme de gradient à pas optimal pour une fonctionnelle quadratique.

Extremums des fonctions réelles de n variables réelles avec contraintes : multiplicateurs de LAGRANGE et mise en œuvre numérique par la méthode de NEWTON.

Méthode des moindres carrés et applications.

FIGURE 1 – Extrait du programme de l'agrégation 2020 concernant la partie optimisation. Disponible à l'url suivante : http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/59/7/p2020_agreg_ext_maths_1107597.pdf

1.2 Borne inférieure et minima

Définition 1 (Minorant d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) *Soit $J \subset \mathbb{R}$. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de J si pour tout $x \in J$ on a*

$$m \leq x.$$

Définition 2 *Soit $J \subset \mathbb{R}$. J est minorée s'il existe un minorant de J. Autrement dit, J est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in J$ on ait*

$$m \leq x.$$

Définition 3 *Soit $J \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des minorants de J est*

$$M(J) := \{m \in \mathbb{R} : \textit{pour tout } x \in J, m \leq x\}.$$

Définition 4 *Soit $J \subset \mathbb{R}$. S'il existe $m_\star \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \in M(J)$ on a*

$$m \leq m_\star$$

alors on dit que $m_\star$ est la borne inférieure de J et on note $m_\star = \inf(J)$.

Exercice 1 (10 min) *Pour les ensembles suivants, démontrer s'ils sont ou non minorés et déterminer leur ensemble des minorants.*

1. $J_1 = [0,1]$, $J_2 =]0,1]$, $J_3 =]-5,2] \cup [5,8[$, $J_4 = [-12,5] \cup]-\infty,-20]$, $J_5 =]-\infty,2] \cap]0,1]$.
2. $J = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ *où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est définie par*

$$u_n = \begin{cases} -2^{-n} & \textit{si } n \textit{ est pair}, \\ -2^{n} & \textit{si } n \textit{ est impair}. \end{cases}$$

3. $J_k = \{f_k(x) : x \in \mathbb{R}\}$ *où pour* $k \in \{1,2,3\}$ *la fonction* f_k *est définie par*

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 3x + 2 \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|x|+1) \end{cases},$$

$$f_3(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{sinon}. \end{cases}$$

4. $J = \{\cos(x_1 x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

On commence par rappeler la proposition suivante à propos de l'existence d'une borne inférieure.

Proposition 1 *Tout sous-ensemble $J \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure $m_\star \in \mathbb{R}$.*

Nous rappelons à toutes fins utiles les caractérisations suivantes de la borne inférieure.

Proposition 2 *Soit $J \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré. Il y a équivalence entre*

1. $m_\star = \inf(J)$,
2. $m_\star \in M(J)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $m \in J$ *tel que* $m_\star \leq m < m_\star + \varepsilon$.
3. $m_\star \in M(J)$ *et il existe une suite* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} m_n = m_\star$.

Nous proposons de faire la démonstration de ces points dans les questions suivantes.

Exercice 2 (10 **min**) *Démontrer la Proposition 2.*

Soit $d \geq 1$, considérons maintenant une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Définition 5 (Minimum local & Minimum global)

1. *f admet un minimum local en $x_\star \in A$ ssi*$_{déf}$

$$\exists\ \delta > 0, \quad \forall\ x \in A \textit{ tel que } \|x - x_\star\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x_\star) \leq f(x).$$

2. *f admet un minimum global en $x_\star \in A$ ssi*$_{déf}$

$$\forall\ x \in A, \quad f(x_\star) \leq f(x),$$

en particulier, on a $f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}$.

Exercice 3 (5 **min**) *Pour les fonctions f_j suivantes définies sur $A_j \in \mathbb{R}^d$, dire si elles sont minorées. Si oui, donner* $\inf\{f_j(x) : x \in A_j\}$*, dire si c'est un minimum global et discuter l'unicité du minimiseur.*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. , \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right. , \quad f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \frac{1}{|\ln(x)|} \end{array} \right.$$

$$f_4 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) & \mapsto & e^{-x_1}|\cos(x_2)| \end{array} \right.$$

1.3 Généralités

Dans ce cours, on s'intéresse à la minimisation d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ où A est un sous-ensemble de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). La fonction f est apellée l'*objectif* et, en termes mathématiques, le problème d'optimisation consiste à s'intéresser à la quantité

$$\inf\{f(x) : x \in A\}. \tag{1}$$

On dit que le problème d'optimisation est sans contrainte si $A = \mathbb{R}^d$ et il est dit avec contraintes sinon.

Remarque 1 *En lieu et place du problème de minimisation* (1)*, on peut être amené à étudier le problème de maximisation*

$$\sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Il s'agit également d'un problème dit d'optimisation. Toutefois, par le simple changement de f en $-f$, on peut se ramèner systématiquement au problème de minimisation, cas que nous considérons dans ce cours.

1.4 Questions associées au problème d'optimisation

Lorsque l'on s'intéresse au problème d'optimisation (1) plusieurs questions « naturelles » apparaissent et nous les commentons maintenant.

Question 1 (Existence d'un minimiseur) *Il s'agit de savoir si « l'inf est un min » dans* (1)*. En termes mathématiques, on se demande s'il existe* $x_\star \in A$ *tel que*

$$f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Si la réponse est positive, alors l'infimum dans (1) *est un minimum et il atteint en* $x_\star$*.*

Pour pouvoir répondre par l'affirmative à la Question 1 on utilise essentiellement un argument de continuité de la fonction objectif f combiné ou bien à la compacité de A ou alors à la coercivité de la fonction objectif f. Ces résultats font l'objet du §3.1.

Question 2 (Unicité du minimiseur) *Supposons qu'il existe* $x_\star \in A$ *tel que*

$$f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Ce $x_\star$ *est-il le seul élément de* A *à réaliser le minimum de la fonction objectif* f *sur* A *? En termes mathématiques, si* $x_\# \in A$ *vérifie*

$$f(x_\#) = \inf\{f(x) : x \in A\},$$

a-t-on $x_\# = x_\star$ *?*

L'argument le plus utilisé pour répondre par l'affirmative à la Question 2 est la convexité de la fonction objectif f. On en discute au §3.2.

Question 3 (Caractérisation du (des) minimiseur(s)) *S'il existe un (des) minimiseur(s), comment peut-on le (les) caractériser ?*

On utilise en grande partie des outils issus du calcul différentiel. Nous en faisons quelques rappels au §4.

Question 4 (Résolution numérique) *Quels algorithmes peut-on mettre en oeuvre afin de résoudre un problème de minimisation de type* (1) *?*

On discute le cas des algorithmes de gradient à pas constant et optimal au §5.

Finalement, les Question 1-4 se résument à la liste suivante. On peut l'interpréter comme une « marche à suivre » lorsque l'on s'attaque à un problème d'optimisation.

1. Existence d'un minimiseur.
2. Y a-t-il unicité des minimiseurs ?
3. Peut-on caractériser un minimiseur par une condition nécessaire ou suffisante ?
4. Quel(s) algorithme(s) permettent de résoudre (1) numériquement ?

1.5 Quelques exemples

Les problèmes d'optimisation sont courants en mathématiques, voilà quelques exemples que vous avez probablement déjà rencontrés.

Exemple 1 (Projection sur un compact en dimension finie) *On considère $\mathbb{R}^d$ muni de son produit scalaire usuel et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ fixé, on s'intéresse à l'infimum*

$$\inf\{\|x - y\| : x \in \mathcal{C}\}.$$

Dans cet exemple, en reprenant les notations utilisées en (1)*, on a :*

(i) Le sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est ici l'ensemble compact $\mathcal{C}$.

(ii) La fonction objectif f est donnée pour $x \in \mathcal{C}$ par $f(x) = \|x - y\|$.

L'exemple 1 est un « cousin » du théorème de projection sur un convexe fermé (grand classique de l'agrégation). Vous pouvez le retrouver dans l'appendice B.

Exemple 2 (Plus petite valeur propre d'une matrice symmétrique réelle) *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $M \in S_d(\mathbb{R})$. On sait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on note $\lambda_1(M)$ sa plus petite valeur propre. En particulier, le théorème de Rayleigh-Ritz (voir Proposition 17) donne la caractérisation*

$$\lambda_1(M) = \inf\{\langle Mx, x\rangle : x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$ et $\| \cdot \|$ est la norme associée. Ainsi, trouver la plus petite valeur propre d'une matrice symétrique réelle revient à étudier un problème d'optimisation. En reprenant les notations utilisées en (1)*, on a ici :*

(i) Le sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est ici la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ c'est à dire $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$.

(ii) La fonction objectif f est donnée pour $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ par $f(x) = \langle Mx, x\rangle$.

Exemple 3 (Problème des moindres carrés) *Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(x_j, y_j)_{1 \leq j \leq N}$ N points de $\mathbb{R}^2$ (on parle ici de nuage de points). Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème de minimisation suivant*

$$\inf\{\sum_{j=1}^{N} |y_j - P(x_j)|^2 : P \in \mathbb{R}_d[X]\ \}.$$

Autrement dit, on cherche un polynôme $P_\star$ de degré au plus d qui approche le « mieux possible » le nuage de point. L'expression le « mieux possible » voulant dire ici qu'au sens de la norme 2 dans $\mathbb{R}^N$ les vecteurs $y = (y_1, \cdots, y_N)$ et $P_\star = \big(P_\star(x_1), \cdots, P_\star(x_N)\big)$ sont les plus proches possibles. Afin de considérer *ce problème comme un problème d'optimisation on identifie* $\mathbb{R}_d[X]$ *avec* $\mathbb{R}^{d+1}$ *grâce à l'isomorphisme canonique*

$$\varphi := \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d+1} \\ P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} a_j X^j & \mapsto & (a_0, \cdots, a_d). \end{array} \right.$$

En reprenant les notations utilisées en (1), *on a ici*

1. *Le sous ensemble* $A = \mathbb{R}^{d+1}$.
2. *La fonction objectif* f *est donnée, pour tout* $a = (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ *par*

$$f(a) = \sum_{j=1}^{N} \left| y_j - \sum_{k=0}^{d} a_k x_j^k \right|^2.$$

2 Rappels des outils mathématiques

On rappelle plusieurs notions préalable à l'étude de problèmes d'optimisations.

2.1 Calcul différentiel

Lorsque l'on étudie des problèmes d'optimisation, on se restreint au cadre de fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

2.1.1 Différentielle d'ordre un

On commence par rappeller la notion de dérivée directionnelle.

Définition 6 *Soit* $h \in \mathbb{S}^{d-1}$ *et* $x_0 \in U$. *Si la fonction* $t \mapsto f(x_0 + th)$ *est dérivable en* $t = 0$, *on définit la dérivée directionnelle de* f *au point* x_0 *dans la direction* h *comme* $\frac{d}{dt}(f(x_0 + th))|_{t=0}$.

Exercice 4 (10 min) *Pour les fonctions suivantes, calculer (si elles existent) les dérivées directionnelles aux points et directions données.*

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x\cos(y) + y\exp(x)$ *en* $(0, 0)$ *dans la direction* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
2. $$f_2(x, y) =: \left\{ \begin{array}{lll} \frac{xy}{x^2+y^2} & si & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & sinon & \end{array} \right.$$

   en $(0, 0)$ *dans la direction* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *puis dans la direction* $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ *pour* $\theta \in [0, 2\pi)$.

Lorsqu'elle existe, on définit la dérivée partielle de f par rapport à la j-ième variable x_j en un point $x_0 \in U$ comme la dérivée directionnelle de f en x_0 dans la direction de $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} \right) = \frac{d}{dt}\big(f(x_0 + te_j)\big)|_{t=0}$$

Remarque 2 *Si f est dérivable en x_0 dans la direction e_j, on note parfois la dérivée partielle $\partial_j f(x_0)$ en lieu et place de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$.*

Exercice 5 (5 min) *Calculer les dérivées partielles en $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x\cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y + z)) \end{array} \right.$$

Exercice 6 (5 min) *Calculer les dérivées partielles en $(1, \sqrt{3}, 1)$ de la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{array} \right.$$

Par la suite, nous aurons besoin d'une notion « plus forte » qui est la notion de base en calcul différentiel, celle d'application différentiable.

Définition 7 (Application différentiable) *On dit que f est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une forme linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $x_0 + h \in U$ on ait*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Par définition, la différentielle de f en x_0 est $Df(x_0) := L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On dit que f est différentiable sur $V \subset U$ ssi$_{déf}$ pour tout $x \in V$, f est différentiable en x.

Remarque 3 *D'autres auteurs peuvent utiliser des notations différentes comme, par exemple :*

$$Df(x_0) = df(x_0) = d_{x_0}f.$$

Exercice 7 (12 min)

1. *Montrer que si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in U$ alors f est continue en x_0.*
2. *Montrer que si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in U$ alors f admet en x_0 des dérivées dans toutes les directions $h \in \mathbb{S}^{d-1}$.*
3. *Montrer que si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in U$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$Df(x_0)(h) = \Big(\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big)|_{t=0}.$$

4. *Montrer que la fonction* $f : x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ *est continue en* 0 *mais pas différentiable en* 0.

Exercice 8 (15 min)

1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable en* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est différentiable en* x_0 *et donner sa différentielle.*
2. *Soir* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *une application linéaire. Montrer que* u *est différentiable en tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *et donner sa différentielle.*
3. *Soit* $u \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *une forme bilinéaire de* $\mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* u *est différentiable en tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ *et donner sa différentielle.*
4. *Soit* $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$, *montrer que l'application* $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle Mx, x\rangle_{\mathbb{R}^d}$ *est différentiable en tout point de* $\mathbb{R}^d$ *et donner sa différentielle.*

Exercice 9 (15 min) *Pour* $j \in \{1, \ldots, d\}$, *on introduit l'application coordonée :*

$$e_j^* : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to \quad \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_d) & \mapsto x_j \end{cases}$$

1. *Montrer que* e_j^* *est une forme linéaire, c'est-à-dire une application linéaire de* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. *Quelle est la matrice de* e_j^* *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^d$ *?*
2. *Démontrer que si* $f : U \to \mathbb{R}$ *est différentiable en* $x_0 \in U$ *alors on a*

$$Df(x_0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) e_j^*.$$

Dans quel espace vectoriel cette égalité est-elle vraie ? Quelle est la matrice de $Df(x_0)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^d$ *?*

Remarque 4 *Historiquement, Leibniz notait la forme linéaire* e_j^* *comme* dx_j. *C'est dans ce sens que l'on doit comprendre la relation*

$$Df(x_0) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) dx_j$$

que l'on trouve en physique ou dans certains ouvrages mathématiques.

Exercice 10 (5 min) *Après avoir rappelé le théorème de représentation de Riesz, justifier que si* $f : U \to \mathbb{R}$ *est différentiable en* $x_0 \in U$ *alors il existe un unique élément* $G(f)_{x_0} \in \mathbb{R}^d$ *tel que pour tout* $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j$ *on ait*

$$Df(x_0)(h) = \langle G(f)_{x_0}, \tilde{h}\rangle, \quad \text{où } \tilde{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}.$$

Donner explicitement $G(f)_{x_0}$. $G(f)_{x_0}$ *est le gradient de* f *en* x_0 *(voir ci-dessous).*

Définition 8 (Gradient) *Lorsque f est différentiable en $x_0 \in U$ on définit le gradient de f au point x_0 comme*

$$\nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier, pour $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j$, on obtient :

$$Df(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0), \tilde{h} \rangle_{\mathbb{R}^d}, \quad \text{où } \tilde{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (15 min - Calculs de gradients) *Après avoir justifier leur existence, calculer le gradient des fonctions suivantes au poins indiqués.*

1. *En tout point de $\mathbb{R}^2$:*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 y + y^2 \end{array} \right. , \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 y + y^2 \end{array} \right. ,$$

$$f_3 : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & \frac{p^2}{2m} + V(q) \end{array} \right. ,$$

   où V est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. *En tout point de $\mathbb{R}^3$ de*

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2 \sin(yz) \end{array} \right. .$$

3. *En tout point où il est bien défini de $\mathbb{R}^d$:*

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right. .$$

Définition 9 *On dit que f est de classe C^1 en $x_0 \in U$, si*

1. *f est différentiable en x_0,*
2. *l'application*

$$Df : \left\{ \begin{array}{lll} U & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & Df(x) \end{array} \right.$$

   est continue en x_0.

On dit que f est de classe C^1 sur U si pour tout $x \in U$, f est de classe C^1 en x.

Exercice 12 (8 min)

1. (a) *Donner une norme sur l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
   (b) *Soit* $\varphi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. *Donner la définition de la continuité pour* φ.
2. *Démontrer que l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 y + y^2 \end{array} \right.$$

   est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 13 (30 min-Gradient & Courbes de niveau et gradient) *On rappelle dans un premier temps le théorème des fonctions implicites.*

Théorème 1 *Soient* E, F, G *trois espaces de Banach et* $U \subset E \times F$ *un ouvert. Soit* $g \in C^1(U, G)$. *On se donne* $(x_0, y_0) \in U$ *et un voisinage* V_0 *de* y_0 *dans* F *tel que*

1. $\{x_0\} \times V_0 \subset U$,
2. $g(x_0, y_0) = 0$,
3. *L'application partielle* $g_{x_0} : y \in V_0 \mapsto g(x_0, y)$ *a une différentielle inversible en* y_0.

Alors, il existe un voisinage U_0 *de* (x_0, y_0), W_0 *voisinage de* x_0 *dans* E *et* $\phi \in C^1(W_0)$ *tels que*

$$(x, y) \in U_0 \text{ et } g(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \in W_0 \text{ et } y = \phi(x).$$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *avec* $U \subset \mathbb{R}^d$ *ouvert et* $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,d}) \in U$ *tel que* $Df(x_0) \neq 0$.

1. *Montrer que qu'il existe* $j \in \{1, \ldots, d\}$ *tel que* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \neq 0$. *Dans la suite, on supposera pour simplifier que* $j = 1$.
2. *En appliquant* ***rigoureusement*** *le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe* $\delta > 0$, *un voisinage* V *contenant* x_0 *et* $\phi_\lambda \in C^1(]x_{0,1} - \delta, x_{0,1} + \delta[)$ *tels que*

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \in V \text{ et } f(x) = \lambda \Longleftrightarrow x_1 \in]x_{0,1} - \delta, x_{0,1} + \delta[\text{ et } (x_2, \ldots, x_d) = \phi(x_1)$$

3. *En déduire que* $C_\lambda \cap V = \{(x_1, \varphi_\lambda(x_1)) : |x_{0,1} - x_1| < \delta\}$.
4. *Montrer que*

$$\langle \nabla f(x_1, \varphi_\lambda(x_1)), (1, \varphi'_\lambda(x_1)) \rangle = 0.$$

5. *Pourquoi dit-on que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau ?*

Exercice 14 (20 min) *On se propose d'étudier les tangentes aux lignes de niveaux des fonctions suivantes.*

1. *Soit* $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on définit* $\mathcal{C}_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \lambda\}$
   (a) *Pour quelles valeurs de* λ *l'ensemble* $\mathcal{C}_\lambda$ *est-il non vide ?*

(b) *Lorsque $\lambda = 1$ représenter l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.*

(c) *Après avoir justifié qu'il existe, calculer le gradient de f en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et en déduire que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$ est donnée par :*

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

et ce pour tout $\lambda > 0$.

2. *Soit $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\mathcal{C}_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = \lambda\}$*

   (a) *Pour quelles valeurs de λ l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$ est-il non vide ?*

   (b) *Lorsque $\lambda = 0$ représenter l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.*

   (c) *Après avoir justifié qu'il existe, calculer le gradient de g en tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et en déduire, lorsqu'il est différent de zéro, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_\lambda$ en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$.*

Proposition 3 *f est de classe C^1 sur U si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et et sont continues sur U.*

Démonstration:
Supposons que f soit de classe C^1 en $x_0 \in U$. Comme f est différentiable en $x_0 \in U$, f est dérivable dans toutes les directions en x_0 et par conséquent toutes les dérivées partielles existent en x_0. De plus, par hypothèse, l'application $x \in U \mapsto Df(x)$ est continue dans un voisinage de x_0. Par définition, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall x \in U \text{ tel que } \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^d} < \eta \Longrightarrow \|Df(x) - Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} < \varepsilon$$

Fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in U$ vérifiant $\|x - x_0\| < \eta$ on ait

$$\begin{aligned} \eta \geq \|Df(x) - Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} &:= \sup_{h \in \mathbb{S}^{d-1}} \Big| Df(x)h - Df(x_0)h \Big| \\ &\geq \Big| Df(x)e_j - Df(x_0)e_j \Big| = \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \Big|. \end{aligned}$$

En particulier, on obtient

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0, \forall x \in U \text{ tel que } \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^d} < \eta \Longrightarrow \Big| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \Big| < \varepsilon$$

ce qui est précisément la définition de la continuité de la dérivée partielle en x_0.

Supposons maintenant que toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur U. Soit $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j \in \mathbb{R}^d$. On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) - f(x_0) &= f(x_0+h) - f(x_0 + \sum_{j=2}^d h_j e_j) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{d-1} \Big(f(x_0 + \sum_{j=p}^d h_j e_j) - f(x_0 + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) \Big) \\
&\quad + f(x_0 + h_d e_d) - f(x_0).
\end{aligned}$$

En particulier, comme les dérivées partielles existent et sont continues en x_0, on a :

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) - f(x_0 + \sum_{j=2}^d h_j e_j) &= \int_0^{h_1} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + t e_1 + (h - h_1 e_1) \Big) dt \\
&= h_1 \int_0^1 \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + t h_1 e_1 + (h - h_1 e_1) \Big) dt.
\end{aligned}$$

De la même façon, pour $p \in \{2, \ldots, d-1\}$ on remarque que

$$\begin{aligned}
f(x_0 + \sum_{j=p}^d h_j e_j) - f(x_0 + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) &= \int_0^{h_p} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0 + t e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) \Big) dt \\
&= h_p \int_0^1 \Big(\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0 + t h_p e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) \Big) dt
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
f(x_0 + h_d e_d) - f(x_0) &= \int_0^{h_d} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0 + t e_d \Big) dt \\
&= h_d \int_0^1 \Big(\frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0 + t h_d e_d) \Big) dt.
\end{aligned}$$

Maintenant, on considère le reste :

$$R(h) := f(x_0+h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^d h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\big|R(h)\big| &\leq \sum_{p=1}^d |h_p| \int_0^1 \Big| \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0 + t h_p e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \Big| dt \\
&\leq \max_{p \in \{1,\ldots,d\}} (|h_p|) \sum_{p=1}^d \int_0^1 \Big| \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0 + t h_p e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0) \Big| dt
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \{1, \ldots, d\}$. Comme les dérivées partielles sont continues, il existe $\eta_p > 0$ tel que si pour tout $t \in (0,1)$ on a $\|th_p e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j\| \leq \eta_p$ alors

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0 + th_p e_p + \sum_{j=p+1}^d h_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_0)\Big| \leq \varepsilon.$$

Posons $\eta = \min_{p\in\{1,\ldots,d\}}(\eta_p)$, on obtient

$$R(h) \leq d \max_{p\in\{1,\ldots,d\}}(|h_p|)\varepsilon.$$

En particulier, $R(h) = o(\|h\|)$ et on obtient que f est différentiable en x_0 avec

$$Df(x_0)h = \langle \nabla f(x_0), h\rangle.$$

De plus, comme les dérivées partielles sont continues, $x_0 \mapsto \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^d$ est continue donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x - x_0\| \leq \eta$ on a $\|\nabla f(x) - \nabla f(x_0)\| \leq \varepsilon$. Fixons $\varepsilon > 0$ et pour $h \in \mathbb{S}^{d-1}$ on a :

$$\|Df(x)h - Df(x_0)h\| = \langle \nabla f(x) - \nabla f(x_0), h\rangle \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, en prenant le supremum pour $h \in \mathbb{S}^{d-1}$, on obtient

$$\|Df(x) - Df(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

f est donc de classe C^1 et la proposition est démontrée. ∎

2.1.2 Différentielle d'ordre deux

On s'intéresse maintenant à la notion de différentielle seconde. On aborde d'abord la notion de dérivées partielles secondes. Pour cela, on suppose que f est différentiable sur U. Par conséquent, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existent en tout point $x \in U$. Dès lors, on peut introduire la notion de dérivées partielles secondes.

Définition 10 (Dérivées partielle seconde) *Supposons que f soit différentiable sur U. On considère $x_0 \in U$. Si la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te_k)$ est dérivable en $t = 0$, on définit la dérivée partielle d'ordre deux de f en x_0 comme*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0) := \lim_{t\to 0}\Big(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)}{t}\Big).$$

Nous pouvons maintenant définir la différentielle seconde. Pour cela on suppose désormais que f est de classe C^1 sur U.

Définition 11 *f est deux fois différentiable en $x_0 \in U$ ssi$_{déf}$ l'application*

$$x \in U \mapsto Df(x)$$

est différentiable en x_0. Dans ce cas, on note $D^2f(x_0)$ la différentielle de Df en x_0 : c'est la différentielle seconde de f en x_0. De plus, $D^2f(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})) \simeq \mathcal{BL}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (forme bilinéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$).

Tout comme pour la différentielle d'ordre un, la différentielle d'ordre deux est un notion plus forte que celle de dérivée partielle d'ordre deux. Ce fait se traduit par la proposition suivante.

Proposition 4 *Supposons que f soit de classe C^1 sur U et deux fois différentiable en $x_0 \in U$. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre deux de f existent en x_0 et pour tout $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j, k = \sum_{j=1}^d k_j e_j \in \mathbb{R}^d$ on a*

$$D^2 f(x_0)(h,k) = \langle \nabla^2 f(x_0)\tilde{h}, \tilde{k}\rangle \quad \text{où } \tilde{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_d \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_d \end{pmatrix}.$$

Ici $\nabla^2 f(x) := (\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p}(x_0))_{j,p\in\{1,\dots,d\}} \in M_d(\mathbb{R})$ est la matrice Hessienne de f.

Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 4.

Exercice 15 (15 min) *On suppose que f est de classe C^1 sur U et deux fois différentiable en $x_0 \in U$.*

1. *On se propose de démontrer dans un premier temps que les différentielles d'ordre deux de f existent en x_0.*
   (a) *Justifier que pour tout $k, j \in \{1,\dots,d\}$ on ait :*
   $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + te_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = Df(x_0+te_k)e_j - Df(x_0)e_j.$$
   (b) *En utilisant le fait que $Df(x_0)$ soit différentiable en x_0, montrer que*
   $$Df(x_0+te_k)e_j - Df(x_0)e_j = tD^2 f(x_0)(e_k, e_j) + o(t).$$
   (c) *En déduire l'existence de dérivées partielles d'ordre deux.*
2. *Nous allons maintenant démontrer le reste de la proposition. Soit $h = \sum_{j=1}^d h_j e_j$ et $k = \sum_{j=1}^d k_j e_j$.*
   (a) *Pour $j, p \in \{1,\dots,d\}$, rappeler pourquoi*
   $$D^2 f(x_0)(e_j, e_p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial_p}(x_0).$$
   (b) *En utilisant la bilinéarité de $D^2 f(x_0)$, démontrer que*
   $$D^2 f(x_0) = \sum_{j,p=1}^d h_j k_p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial_p}(x_0)$$
   (c) *Conclure en démontrant que*
   $$D^2 f(x_0)(h,k) = \langle \nabla^2 f(x_0)\tilde{h}, \tilde{k}\rangle$$

Le prochain résultat peut se trouver, par exemple dans [6, Théorème 6.1.]. Il exprime le fait que la forme bilinéaire $D^2 f(x_0)$ d'une fonction deux fois différentiable en $x_0 \in U$ est symétrique.

Proposition 5 (Théorème de Schwarz) *Si f est deux fois différentiable en $x_0 \in U$ alors $\nabla^2 f(x_0) \in S_d(\mathbb{R})$. Autrement dit :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x_0).$$

Démonstration:
Voir [6, Théorème 6.1.] pour une heuristique de la démonstration et [4, Théorème 2 p. 306] pour une démonstration dans le cas $d = 2$. ■

Nous aurons également besoin de la notion de classe C^2 (et on en profite pour définir celle de classe C^k).

Définition 12 *f est de classe C^2 en $x_0 \in U$ si $x \to Df(x)$ est de classe C^1 en x_0. f est de classe C^2 sur U si f est de classe C^2 pour tout $x \in U$.*

Plus généralement, pour $k \geq 1$, on dit que f est de classe C^k si $D^{(k-1)} f$ est de classe C^{k-1} et $D^{(k-1)} f$ est de classe C^1.

La proposition suivante est cruciale en pratique. Elle permet généralement de justifier qu'une fonction donnée est bien de classe C^k.

Proposition 6 *f est de classe C^k en $x_0 \in U$ si les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues en x_0.*

Démonstration:
La démonstration se fait par récurrence sur $k \geq 1$ à partir de la proposition 3. ■

Exercice 16 (15 min - Calculs de Hessiennes) *Après avoir justifié qu'elles existent, calculer les Hessiennes des fonctions suivantes aux points demandés.*

1. *$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_1(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*
2. *$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_2(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*
3. *$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_3(x, y, z) = x^2 - 2xz - y^2 - 2yz$ en tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*
4. *$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f_4(x, y) = e^x + \frac{y^3}{3}$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

Finalement, la formule clé de calcul différentiel dans les problèmes d'optimisation est la formule de Taylor-Young à l'ordre deux (voir par exemple [6, Théorème 6.2.]).

Proposition 7 (Formule de Taylor-Young [ordre 2]) *Soit f de classe C^1 sur U et deux fois différentiable en $x_0 \in U$ alors*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + Df(x_0)h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2), \quad h \to 0; \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_0) h, h \rangle + o(\|h\|^2), \quad h \to 0. \end{aligned}$$

On se propose de faire la démonstration de la proposition 7 dans l'exercice suivant.

Exercice 17 (10 min) *Soit f de classe C^1 sur U et deux fois différentiable en $x_0 \in U$, soit $h \in \mathbb{R}^d$.*

1. *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $[x_0 - \delta h, x_0 + \delta h] \subset U$.*
2. *Soit $\varphi : t \in [-\delta, \delta] \mapsto f(x_0 + th)$. Montrer que φ est de classe C^1 sur $]-\delta, \delta[$ et deux fois dérivable en $t = 0$. En déduire que*

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h, \quad \varphi''(0) = D^2 f(x_0)(h, h).$$

3. *Après en avoir correctement vérifié les hypothèses, appliquer la formule de Taylor-Young pour une fonction d'une variable réelle à la fonction φ en 0.*
4. *En déduire la proposition.*

2.2 Convexité

Un outil très utile dans les problèmes d'optimisation repose sur la convexité de la fonction objectif f. Commençons par rapeller quelques notions élémentaires.

Définition 13 (Ensemble convexe) *Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit convexe si pour tous points $x, y \in \mathcal{C}$ le segment $[x, y]$ est contenu dans $\mathcal{C}$. C'est-à-dire que pour tous les points $x, y \in \mathcal{C}$ et tout $t \in [0, 1]$, le point $tx + (1-t)y \in \mathcal{C}$.*

Définition 14 (Fonction convexe) *Considèrons $\mathcal{C}$ un ensemble convexe de E et $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$. La fonction g est dite convexe si pour tous les points $x, y \in \mathcal{C}$ et tout $t \in [0, 1]$ on a*

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

g est dite strictement convexe lorsque l'inégalité est stricte chaque fois que $x \neq y$.

La proposition suivante est d'une importance cruciale.

Proposition 8 *Suposons que A est ouvert et que $f : A \to \mathbb{R}$ soit convexe. Alors, f est localement Lispchitzienne sur A. Plus précisément, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage de V_x de x dans A tel que $f|_{V_x}$ soit Lipschitzienne avec une constante de Lispchitz qui dépende V_x.*

Remarque 5 *Une conséquence de ce théorème est que si f est convexe, alors f est continue.*

Démonstration:
Voir [5, Prop. 5.18] ■

Il se trouve que lorsque f est suffisamment différentiable, on peut caractériser la convexité à l'aide de ∇f et $\nabla^2 f$. C'est le but de la proposition suivante.

Proposition 9 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On a les équivalences*

1. *f est convexe sur $\mathbb{R}^d$,*
2. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$,*
3. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$.*

Si, de plus, f est deux fois différentiable, les énoncés précendants sont également équivalents à

4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive* i.e. *pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq 0$.*

On peut remplacer « convexe »par « strictement convexe »dans 1. si les inégalités sont strictes pour $x \neq y$ dans les propositions suivantes.

Exercice 18 (15 min) *En utilisant la caractérisation* 4. *de la proposition 9, dire quelles fonctions données à l'exercice 16 sont convexes.*

Le but de l'exercice suivant est de démontrer la proposition 9.

Exercice 19 (30 min) *Nous allons démontrer la proposition 9 dans le cas convexe seulement. Le but de la première question est de démontrer, dans cet ordre, que* 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 3. $\Longrightarrow$ 1.

1. *Nous commençons par démontrer que* 1. $\Longrightarrow$ 2.
   (a) *Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f((1 - t)x + ty)$. Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$ on a*
   $$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \leq \varphi(1) - \varphi(0).$$
   (b) *Justifier que φ est dérivable en 0 et que*
   $$\varphi'(0) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle.$$
   (c) *Conclure.*
2. *Montrer que* 2. $\Longrightarrow$ 3.
3. *Nous allons démontrer que* 3. $\Longrightarrow$ 1.
   (a) *Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par*
   $$g(t) = (1 - t)f(x) + tf(y) - f((1 - t)x + ty).$$
   Démontrer que g est dérivable sur $]0, 1[$ et qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $g'(t_0) = 0$.
   (b) *Nous allons démontrer que $g'(t) \geq 0$ pour $t \in]0, t_0[$ puis $g'(t) \leq 0$ pour $t \in]t_0, 1[$.*
      i. *Pour $t \in]0, 1[$, calculer $g'(t)$.*
      ii. *On pose $z_t := (1 - t)x + ty$. Montrer que pour $t \in]0, t_0[$ on a :*
      $$\langle \nabla f(z_t), y - x \rangle \leq \langle \nabla f(z_{t_0}), y - x \rangle.$$

        iii. *En déduire que pour tout $t \in]0, t_0[$ on a $g'(t) \geq g'(t_0) = 0$.*
        iv. *En raisonnant comme aux deux questions précédentes, montrer que pour tout $t \in]t_0, 1[$ on a $g'(t) \leq 0$.*
    (c) *Démontrer que pour tout $t \in [0, 1]$ on a $g(t) \geq 0$ et conclure.*

4. *On se propose maintenant de montrer que 3. $\Longleftrightarrow$ 4. lorsque f est en plus de classe C^2.*
    (a) *On montre d'abord que 3. $\Longrightarrow$ 4. Supposons que 3. est vraie.*
        i. *Pour $t \in [0, 1]$, on définit $\varphi(t) = \langle \nabla f(z_t), y - x \rangle$ où $z_t = (1 - t)x + ty$. Montrer que φ est croissante puis qu'elle est dérivable.*
        ii. *En déduire que $\varphi'(1) \geq 0$ puis conclure.*
    (b) *Montrons que 4. $\Longrightarrow$ 3. Supposons que 4. est vraie.*
        i. *Montrer que φ est croissante.*
        ii. *En déduire 3.*

3 Existence et unicité des minimiseurs

3.1 Existence

Dans ce paragraphe, nous donnons les principaux résultats qui permettent de traiter la question d'existence pour le problème d'optimisation (1) et ainsi de répondre par l'affirmative à la Question 1. Tous les résultats sont démontrés à la fin du paragraphe.

Le théorème suivant permet de traiter le cas où l'ensemble A est compact.

Théorème 2 *Si la fonction objectif f est continue de A dans $\mathbb{R}$ et A est compact dans $\mathbb{R}^d$ alors le problème de minimisation (1) a au moins une solution, c'est-à-dire qu'il existe $x_\star \in A$ tel que*

$$f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Le but de l'exercice suivant est de démontrer le théorème 2.

Exercice 20 (8 min) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ continue avec A compact. On note $m = \inf\{f(x) : x \in A\}$.*

1. *Pourquoi est-ce que $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$?*
2. *Montrer qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to m$ lorsque $n \to +\infty$.*
3. *Pourquoi est-ce qu'il existe $x_\star \in A$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x_\star$.*
4. *En déduire que $f(x_\star) = m$.*

Un corollaire important du Théorème 2 nous permet de traiter la Question pour 1. lorsque la fonction f est coercive. Nous rappelons d'abord la définition de la coercivité.

Définition 15 (coercivité) *Supposons que A soit non borné. On dit d'une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ est coercive si*

$$g(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Corollaire 1 *Si la fonction objectif f est continue sur A et est coercive alors, si A est fermé, le problème de minimisation* (1) *a au moins une solution, c'est-à-dire qu'il exste $x_\star \in \mathbb{R}^d$ tel que*

$$f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Nous démontrons maintenant le corollaire 1.

Exercice 21 (8 min) *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ fermé et $f : A \to \mathbb{R}$, coercive et continue.*

1. *Fixons $x_0 \in A$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que*

$$\inf\{f(x) : x \in A\} = \inf\{f(x) : x \in A \cap \overline{B(x_0, R)}\},$$

   où $B(x_0, R)$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$ pour une norme $\|\cdot\|$ donnée.

2. *Pourquoi peut-on alors appliquer le Théorème 2 à $f|_{A \cap \overline{B(x_0,R)}}$?*
3. *Conclure.*

3.2 Unicité

Le résultat d'unicité pour un minimiseur du problème d'optimisation (1) que nous allons énoncer repose sur des arguments de convexité, à la fois de l'ensemble A et de la fonction f. Le théorème essentiel concernant l'unicité est :

Théorème 3 *Supposons que A est convexe et que la fonction objectif f soit strictement convexe. S'il existe $x_\star$ tel que*

$$f(x_\star) = \inf\ \{f(x) : x \in A\}$$

alors $x_\star$ est unique.

Nous nous proposons de démontrer le théorème 3.

Exercice 22 (5 min) *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction <u>strictement</u> convexe. On suppose de plus qu'il existe $x_\star$ tel que $f(x_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}$. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $y_\star \neq x_\star$ tel que $f(y_\star) = \inf\{f(x) : x \in A\}$.*

1. *Montrer que $f(z_\star) < \inf\{f(x) : x \in A\}$ où $z_\star = \frac{1}{2}x_\star + \frac{1}{2}y_\star$.*
2. *Conclure.*

4 Caractérisation des minimiseurs

4.1 Problème sans contrainte

Proposition 10 (Equation d'Euler) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathring{A}$. Si f admet un minimum local en $x_\star \in \mathring{A}$ alors*

$$\nabla f(x_\star) = 0.$$

Si $A = \mathbb{R}^d$ et f est convexe de classe C^1, cette condition est suffisante et $x_\star$ est un minimum global.

On démontrer maintenant la caractérisation donnée par l'équation d'Euler.

Exercice 23 (12 min)

1. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ différentiable en $x_\star \in \mathring{A}$ où $x_\star$ est un minimum local de f.*
   (a) *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$ et $h \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|h\| = 1$ on a*
   $$t\langle \nabla f(x_\star), h\rangle + o(t) \geq 0.$$
   (b) *En déduire l'équation d'Euler en discutant l'inégalité précédente selon le signe de t.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et convexe. On suppose qu'il existe $x_\star \in \mathbb{R}^d$ tel que $\nabla f(x_\star) = 0$, démontrer que $x_\star$ est un minimum global.*

Définition 16 *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f : A \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 sur A. Si $x \in A$ vérifie $\nabla f(x) = 0$, on dit que x est un point critique de f.*

Exercice 24 (3 min) *Attention, les points critiques d'une fonction ne sont pas nécessairement des extrema locaux. Sauriez-vous donner un contre-exemple ?*

Lorsque f est deux fois différentiable en $x_\star$ on a de plus la proposition suivante.

Proposition 11 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable en $x_\star \in \mathring{A}$ telle que $\nabla f(x_\star) = 0$. Si $\nabla^2 f(x_\star)$ est définie positive alors f admet en $x_\star$ un minimum local.*

Démontrons alors la proposition 11.

Exercice 25 (15 min) *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable en $x_\star \in \mathring{A}$ telle que $\nabla f(x_\star) = 0$ et telle que $\nabla^2 f(x_\star)$ soit définie positive.*

1. *Donner la définition d'une matrice symétrique réelle définie positive.*
2. *Soit $\mu := \inf_{h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \frac{\langle \nabla^2 f(x_\star) h, h\rangle}{\|h\|^2}$. En utilisant la formule de Taylor-Young, démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|h\| = 1$ et $t \in (-\delta, \delta)$ on ait*
   $$f(x + th) \geq f(x_\star) + t^2\mu + o(t^2).$$

3. *En déduire qu'il existe $\delta_1 \in (0, \delta)$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|h\| = 1$ et $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ on ait*
$$f(x + th) \geq f(x_\star).$$
4. *Conclure.*

Exercice 26 (20 min) *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = -\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.*

1. *Soit $F = [0, 1] \times [0, 1]$. Montrer que f est bornée sur F et y atteint sa borne sa borne inférieure. On pose alors $m = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in F\}$.*
2. *Montrer que si la borne inférieure est atteinte en un point de l'ouvert $\overset{\circ}{F} =]0, 1[\times]0, 1[$ alors $m = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$.*
3. *Déterminer le minimum de la fonction f sur $F \setminus \overset{\circ}{F}$. Déterminer m.*

Exercice 27 (25 min-Méthode des moindres carrés) *Soit $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$. On cherche à minimiser $f(x) = \|Mx - b\|_2^2$.*

1. *Montrer que $x_\star$ est solution du problème des moindres carrés si et seulement si $M^t M x_\star = M^t b$ (dite équation normale).*
2. *On se propose de démontrer l'existence d'une solution au problème des moindre carrés.*
   (a) *Montrer que $\mathbb{R}^m$ se décompose en somme directe orthogonale comme :*
   $$\mathbb{R}^m = Im(M) \oplus \ker(M^t).$$
   (b) *En déduire que $Im(M^t) \subset Im(M^t M)$ et que le problème de minimisation a toujours une solution.*
   (c) *Montrer que $\mathbb{R}^n$ se décompose en somme directe orthogonale comme :*
   $$\mathbb{R}^n = \ker(M) \oplus Im(M^t).$$
   (d) *En déduire que $\ker(M^t M) = \ker(M)$.*
   (e) *Démontrer que l'ensemble des minimiseurs de f est un espace affine de direction $\ker(M)$.*
   (f) *Sous quelle condition sur M a-t-on une unique solution ?*
3. *Ré-écrire le problème d'approximation de m points distincts de $\mathbb{R}^2$ par un polynôme de degré $n-1$ sous la forme d'un problème des moindres carrés.*

4.2 Problème avec contrainte

On considère $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et on définit
$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : g_1(x) = \cdots = g_p(x) = 0\}.$$
Ici les fonctions g_j sont de classes $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On s'intéresse au problème de minimisation sous contrainte $\inf_{x \in A} f(x)$.

Théorème 4 (Extremas liés) *Si f admet un minimum local en $x_\star \in A$ et si $\nabla g_1(x_\star), \ldots, \nabla g_p(x_\star)$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$ alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\nabla f(x_\star) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(x_\star) = 0.$$

Cette dernière équation est souvent appelée équation d'Euler-Lagrange.

Exercice 28 (10 min) *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $S \in S_d(\mathbb{R})$. On cherche à minimiser $f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle Sx, x \rangle$ sous la contrainte $x \in A := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$.*

1. *Montrer que $f|_A$ admet un minimum global noté $x_\star \in A$.*
2. *Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$Sx_\star = \lambda x_\star.$$

3. *Quelle est la valeur de $f(x_\star)$?*

Exercice 29 *L'énergie d'une particule quantique de masse m dans un boite parallélépipédique de côtés a, b, c est donnée par*

$$\mathcal{E}(a, b, c) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

où $\hbar$ est la constante de Planck. Démontrer que si le volume du parallélépipède $V(a, b, c) = abc$ est fixé à V_0 alors le cube de volume V_0 minimise l'énergie de la particule.

5 Méthodes de Gradient

L'objectif de ce paragraphe est de discuter de méthodes itératives permettant de répondre au problème de minimisation (1).

On va se concentrer sur les méthodes dites de descente :

Pour $x_k \in A$, on construit $x_{k+1} = x_k + s_k d_k$ où $s_k \in \mathbb{R}$ est un pas de descente et $d_k \in \mathbb{R}^d$ est une direction de descente. Une méthode de gradient revient à prendre pour direction de descente celle du gradient : $-\nabla f(x_k)$. La question reste alors de trouver le "bon" pas pour que la méthode converge.

5.1 Notion d'α-convexité

Nous aurons également besoin de la notion d'α-convexité donnée dans [2].

Définition 17 *Soit A un ensemble convexe non vide et $f : A \to \mathbb{R}$. f est dite α-convexe si pour tout $x, y \in A$ et tout $t \in [0, 1]$ on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x - y\|^2.$$

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est α-convexe, on a les propriétés suivantes que l'on peut retrouver dans [3].

Proposition 12 *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est différentiable alors on a équivalence entre les énoncés suivants.*

1. *$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est α-convexe.*
2. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$.*
3. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \alpha\|y - x\|^2$*

Si de plus, f est deux fois différentiable alors on a également :

4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $\langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2$.*

Remarque 6 *On remarque que :*

1. *Si f est α-convexe, alors f est strictement convexe.*
2. *Si f est α-convexe et différentiable alors f est coercive.*

5.2 Méthode du gradient à pas constant

Dans la méthode du gradient à pas constant, on choisit le pas de descente est choisit constant. On construit donc, pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ la suite des itérés :

$$x_{k+1} = x_k - s\nabla f(x_k).$$

Proposition 13 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe deux fois différentiable telle que $M = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla^2 f(x)| < +\infty$. Alors la méthode du gradient à pas constant converge pour tout $s \in \left(0, 2\dfrac{\alpha}{M^2}\right)$.*

Exercice 30 (15 min) *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe deux fois différentiable telle que $M = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla^2 f(x)| < +\infty$. On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n - s\nabla f(x_k)$.*

1. *Montrer que f admet un unique minimum atteint en $x_\star \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a :*

$$\|x_{n+1} - x_\star\|^2 \leq \|x_n - x_\star\|^2(1 - 2s\alpha + M^2 s^2).$$

On devra utiliser le fait que $x_\star$ est un minimum, la α-convexité de f et l'inégalité des accroissements finis pour ∇f.

3. *En déduire que la méthode du gradient à pas constant converge pour $s \in \left(0, 2\dfrac{\alpha}{M^2}\right)$, que cette convergence est géométrique. Quelle est la valeur de $s \in \mathbb{R}$ optimale ?*

5.3 Méthode du gradient à pas optimal

La méthode du gradient à pas optimal consiste à prendre pour pas

$$s_n = \operatorname{argmin}_{r\in\mathbb{R}}\big(f(x_n - r\nabla f(x_n)\big).$$

Proposition 14 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe de classe C^2 telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|D^2 f(x)\|_{\mathcal{BL}(\mathbb{R}^d)} \leq M$. La méthode du gradient à pas optimal converge.*

Exercice 31 (20 min) *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe de classe C^2 telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|D^2 f(x)\|_{\mathcal{BL}(\mathbb{R}^d)} \leq M$.*

1. *Montrer que f admet un unique minimum global atteint en un unique minimiseur noté $x_\star$.*
2. *Soit $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $\nabla f(v) \neq 0$. Montrer que $s \mapsto f(v - s\nabla f(v))$ admet un minimum global en un unique point $s_\star$(on pourra montrer qu'elle est coercive et strictement convexe).*
3. *Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et considérons la suite*

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - s_n\nabla f(x_n) & si \quad \nabla f(x_n) \neq 0 \\ x_n & sinon \end{cases},$$

   où $s_n = argmin\big(f(x_n - s\nabla f(x_n))\big)$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\langle \nabla f(x_{n+1}), \nabla f(x_n)\rangle = 0.$$

4. *Démontrer que pour tout $n \geq 0$, on a*

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_{n+1}\|^2$$

   puis en déduire que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que la suite $(x_n - x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
5. *Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\|\nabla f(x_n)\| \leq \|\nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n+1})\|$. En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que $(\nabla f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.*
6. *Montrer que $\|x_n - x_\star\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla f(x_n)\|$ et conclure.*

5.4 Méthode de gradient pour l'optimisation sous contrainte

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et strictement convexe et $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(x) = 0\}$, on s'intéresse au problème d'optimisation sous contrainte :

$$\inf_{x\in A} f(x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = f(x) + n\phi(x)$. On a le résultat suivant.

Proposition 15 *Il existe un unique minimiseur $x_\star \in A$ au problème de minimisation $\inf_{x\in A} f(x)$ et il existe un uniquement minimiseur x_n pour f_ε. De plus, on a*

$$\|x_n - x_\star\| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Exercice 32 (15 min) *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et strictement convexe et $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(x) = 0\} \neq \emptyset$, on s'intéresse au problème d'optimisation sous contrainte :*

$$\inf_{x\in A} f(x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = f(x) + n\phi(x)$.

1. *Montrer que f admet un unique minimum global atteint en un unique minimiseur noté $x_\star \in A$.*
2. *Montrer que f_n admet un unique minimum global atteint en un unique minimiseur noté $x_n \in \mathbb{R}^d$.*
3. *Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée et que pour tout $n \geq 1$ on a*

$$0 \leq \phi(x_n) \leq \frac{1}{n}\big(f(x_\star) - f(x_n)\big).$$

4. *En déduire que la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 1}$ est l'unique minimiseur $x_\star$ de f puis conclure.*

5.5 Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^2 au voisinage de $x \in \mathbb{R}^d$ alors, on a

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle + o(\|h\|^2).$$

La stratégie de la méthode de Newton consiste à supposer que f est bien approchée par son développement de Taylor à l'ordre 2 est de trouver la meilleure direction h pour minimiser $f(x+h)$.

En pratique, à x fixé, on souhaite donc minimiser la fonctionnelle quadratique

$$g_x := h \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \in \mathbb{R}.$$

g_x est de classe C^∞ et on calcule aisément son gradient en $h \in \mathbb{R}^d$ en remarquant que :

$$g_x(h+h_0) = g_x(h) + \langle \nabla f(x), h_0\rangle + \langle \nabla^2 f(x)h, h_0\rangle + o(\|h_0\|^2).$$

En particulier, on obtient

$$\nabla g_x(h) = \nabla f(x) + \nabla^2 f(x)h$$

L'équation d'Euler nous dit que si h est un point critique de g_x alors on a :

$$\nabla f(x) + \nabla^2 f(x) h = 0,$$

ce qui, lorsque la Hessienne est inversible, s'écrit :

$$h = -\big(\nabla^2 f(x)\big)^{-1} \nabla f(x).$$

La méthode de Newton est une méthode itérative qui se construit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^d, \\ x_{k+1} = x_k - \big(\nabla^2 f(x_k)\big)^{-1} \nabla f(x_k), \end{array} \right. \tag{2}$$

en supposant que f est a une Hessienne inversible au point $x_k \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 7 *On pourrait considérer une méthode itérative de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^d, \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \big(\nabla^2 f(x_k)\big)^{-1} \nabla f(x_k), \end{array} \right.$$

pour un pas de descente $\alpha_k \in \mathbb{R}$ à choisir. On peut notamment construire des méthodes de Newton à pas variable, en particulier en choisissant un pas optimal à chaque étape. Nous ne l'abordons pas ici mais il est toujours bon de savoir que c'est une possibilité.

Remarque 8 *La méthode de Newton peut-être vue comme un algorithme de recherche de zéros pour une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1. En effet, dans ce cas, on a le développement de Taylor à l'ordre 1 :*

$$g(x+h) = g(x) + Dg(x)h + o(\|h\|)$$

Si on suppose que g est bien approchée par son développement de Taylor à l'ordre 1, on cherche la direction h à choisir telle que $g(x+h) = 0$ ce qui revient à prendre

$$h = -Dg(x)^{-1} g(x)$$

lorsque $Dg(x)$ est inversible. On construit alors la suite d'itérées

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^d, \\ x_{k+1} = x_k - Dg(x_k)^{-1} g(x_k), \end{array} \right.$$

lorsque Dg est inversible en x_k.

On retrouve l'algorithme (2), si l'on choisit $g(x) = \nabla f(x)$. La méthode de Newton (2) peut donc être vue comme un algorithme de recherche de zéros pour la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \nabla f(x) \in \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire un algorithme de recherche des points critiques de f.

Proposition 16 *On suppose que f est de classe C^3 et on se donne $x_\star \in \mathbb{R}^d$ tel que*

1. *$x_\star$ soit un point critique de f, c'est-à-dire $\nabla f(x_\star) = 0$,*
2. *$x_\star$ soit non-dégénéré : $\nabla^2 f(x_\star)$ soit inversible.*

Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(x_\star, \delta)$ on a :

$$\|x_{k+1} - x_\star\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - x_\star\|.$$

En particulier, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_\star$.

On peut également démontrer que la vitesse de convergence est quadratique mais nous ne le ferons pas ici.

On va démontrer dans l'exercice suivante la proposition 16.

Exercice 33 (25 min) *Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2 et $x_\star \in \mathbb{R}^d$ tel que*

i) $g(x_\star) = 0$,

ii) $Dg(x_\star) \neq 0$.

1. *Démontrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_\star, \delta_0)$ la différentielle $Dg(x)$ soit inversible.*
2. *Démontrer qu'il existe $\delta_1 \in]0, \delta_0[$ tel que pour tout $x \in B(x_\star, \delta_1)$ on a :*

$$\|Dg(x) - Dg(x_\star)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{4\|Dg(x)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)}}.$$

3. *Soit $G : B(x_\star, \delta_1) \to \mathbb{R}^d$ définie comme $G(x) := x - Dg(x)^{-1}g(x)$.*
   (a) *Démontrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ telle que*

   $$G(x) - x_\star = Dg(x)^{-1}\Big((Dg(x) - Dg(x_\star))(x - x_\star) + \varepsilon(\|x - x_\star\|)(x - x_\star)\Big).$$

   (b) *Montrer alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_\star, \delta)$ on ait*

   $$\|G(x) - x_\star\| \leq \frac{1}{2}\|x - x_\star\|.$$

   (c) *En déduire que la suite définie par $x_0 \in B(x_\star, \delta)$, $x_{n+1} = x_n - Dg(x_n)^{-1}g(x_n)$ est bien définie et converge vers $x_\star$.*
4. *Comment appliquer ce résultat pour démontrer la proposition 16 ?*

A Théorème de Rayleigh-Ritz

Proposition 17 *Soit $M \in H_d(\mathbb{C})$. On a*

$$\lambda_1(M) = \inf\{\langle Mx, x\rangle : x \in \mathbb{C}^d, \|x\| = 1\},$$
$$\lambda_d(M) = \max\{\langle Mx, x\rangle : x \in \mathbb{C}^d, \|x\| = 1\}.$$

Démonstration:
Comme M est hermitienne, elle est diagonalisable en base orthonormée et on note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_d$ ses valeurs propres et on considère une base orthonormée $\mathcal{B} := (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ de vecteurs propres de M telle que $Me_j = \lambda_j e_j$. Soit $x \in \mathbb{C}^d$ tel que $\|x\| = 1$. On sait que $x = \sum_{j=1}^d \alpha_j e_j$ où pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$ on a $\alpha_j \in \mathbb{C}$ avec $\sum_{j=1}^d |\alpha_j|^2 = 1$. En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle Mx, x\rangle = \langle \sum_{j=1}^d \alpha_j M e_j, \sum_{k=1}^d e_k\rangle &= \langle \sum_{j=1}^d \alpha_j \lambda_j e_j, \sum_{k=1}^d e_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \lambda_j \alpha_j \overline{\alpha_k} \langle e_j, e_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^d \lambda_j |\alpha_j|^2.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \Big(\min\{\lambda_j : j \in \{1, \ldots, d\}\}\Big) \sum_{j=1}^d |\alpha_j|^2 \leq &\langle Mx, x\rangle \\ &\leq \lambda_d = \Big(\max\{\lambda_j : j \in \{1, \ldots, d\}\}\Big) \sum_{j=1}^d |\alpha_j|^2.\end{aligned}$$

■

B Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 5 (Projection sur un convexe fermé dans un Hilbert) *Soit H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que*

$$d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|.$$

On note $y := P_C(x)$ et il est caractérisé par

$$y = P_C(x) \Longleftrightarrow \textit{pour tout } z \in C, \Re(\langle y - x, y - z\rangle) \leq 0$$

Nous aurons besoin de cette proposition.

Proposition 18 (Théorème des fermés emboités) *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E telle que $F_{n+1} \subset F_n$. Si $\delta_n := \sup_{x,y \in F_n} d(x, y) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ alors il existe un unique $x_\star \in E$ tel que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_\star\}$$

Démonstration:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $x_n \in F_n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E. En effet, pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\delta_n \le \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \ge n_0$ et $p \in N$ on a $x_{n+p}, x_n \in F_n$ donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \le \delta_n \le \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et comme l'espace E est complet elle converge vers $x_\star \in E$.

Il se trouve que $x_\star \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, si on considère la suite $(x_k)_{k\ge n}$, c'est une suite d'éléments de F_n (car $x_k \in F_k \subset F_n$ pour tout $k \ge n$). Comme F_n est fermé sa limite $x_\star$ appartient à F_n. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x_\star \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Supposons qu'il y ait deux éléments distincts $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x, y \in F_n$ donc on a

$$d(x, y) \le \delta_n.$$

En particulier, lorsque $n \to +\infty$ on obtient $d(x, y) = 0$ soit $x = y$. Ce qui prouve la proposition. ■

Démonstration du Théorème 5:
Notons $\delta := d(x, C)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la boule fermée de centre x

$$B_n := \{z \in H : \|x - z\| \le \delta + \frac{1}{n}\}$$

et on définit $F_n := B_n \cap C$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ F_n est fermé comme intersection de fermés. De plus, F_n est non vide car sinon, pour tout $z \in C$, on a

$$\|x - z\| \ge \delta + \frac{1}{n}.$$

Par passage à l'infimum dans le membre de droite, on obtient :

$$\delta = \inf_{z\in C} \|x - z\| \ge \delta + \frac{1}{n}.$$

Ce qui est absurde. On a également $F_{n+1} \subset F_n$ et il suffit alors de montrer que le diamètre des F_n tend vers 0. Soient $y, z \in F_n$, l'identité du parallélogramme donne

$$\|y - z\|^2 = 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - \|y + z - 2x\|^2 \le 4(\delta + \frac{1}{n})^2 - 4\|\frac{y + z}{2} - x\|^2.$$

Comme $\frac{y+z}{2} \in C$, on obtient pas définition de δ :

$$\|y - z\|^2 \le 4(\delta + \frac{1}{n})^2 - 4\delta^2 = \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n}.$$

Donc, par passage au supremum

$$\sup_{y,z\in F_n} \|y-z\|^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{8}{n} \to 0, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

L'espace métrique C est complet car fermé dans l'espace de Hilbert H et on applique le théorème des fermés emboités aux F_n. Ainsi, il existe un unique $y \in C$ tel que $\bigcap_{n\geq 1} F_n = \{y\}$. De plus, x vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|x-y\| \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

En particulier $\|x-y\| \leq \delta := \inf_{z\in C} \|x-z\|$ donc $\|x-y\| = \delta$.

Montrons alors l'équivalence dans la caractérisation. Supposons que $y = P_C(x)$ et prenons $z \in C$. Comme C est convexe, pour tout $t \in (0,1)$ on a $(tz + (1-t)y) \in C$ et par définition de y on obtient

$$\|x - (tz + (1-t)y)\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

Ce qui devient

$$\|x-y\|^2 + t^2\|z-y\| + 2t\Re(\langle x-y, y-z\rangle) \geq \|x-y\|^2.$$

En particulier, en divisant par t, on obtient :

$$t\|z-y\| + 2\Re(\langle x-y, y-z\rangle) \geq 0.$$

En laissant $t \to 0$ on arrive à

$$\Re(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe $y \in C$ tel que pour tout $z \in C$, on ait $\Re(\langle y-x, y-z\rangle) \leq 0$. On a

$$\|z-x\|^2 = \|z-y+y-x\|^2 = \|z-y\|^2 + \|y-x\|^2 - 2\Re(\langle y-x, y-z\rangle) \geq \|y-x\|^2.$$

On obtient alors

$$\delta = \inf_{z\in C} \|z-x\|^2 \geq \|y-x\|^2$$

et comme $y \in C$, $y = P_C(x)$. ■

Références

[1] G. Allaire :*Analyse numérique et optimisation*, Ed. École Polytechnique, 2005.

[2] V. Beck, J. Malick, G. Peyré : *Objectif Agrégation*, H & K, 2004.

[3] P.G. Ciarlet :*Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[4] X. Gourdon :*Analyse, les maths en tête*, Éditions Ellipse, 2-ième édition, 2008.

[5] V. Komornik :*Précis d'analyse réelle*, Vol. 1.

[6] F. Rouvière :*Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Éditions Cassini, 2-ième édition, 2003.