

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique

Université Badji Mokhtar-Annaba



Organisme Pilote : ATRST (ex ANDRU)

Projet PNR (08-Fondamentales)

Domaine : Mathématiques

Thème

*Etude Mathématique et numérique pour quelques modèles de la dynamique de gaz, exemple d'un système des équations d'Euler de la dynamique des gaz*

RAPPORT FINAL

CHEF DE PROJET  
Dr. Bradji, Abdallah  
Laboratoire Mathématiques Appliquées (LMA)

تقرير عام لمشروع البحث  
Rapport général du projet PNR

I-Identification du projet:

PNR

08-Sciences Fondamentales

1-التعريف بالمشروع

Organisme pilote

ATRST (ex ANDRU)

Domiciliation du projet :

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université BADJI-Mokhtar-Annaba

Intitulé du projet

عنوان المشروع

Etude Mathématique et numériques de quelques modèles de dynamique de Gaz, exemple système d' équations d'Euler de la dynamique de Gaz

Chercheurs impliqués dans le projet

أعضاء المشروع و المؤسسة المستخدمة

Nom et prénom الاسم و اللقب	Grade الرتبة	Etablissement employeur المؤسسة المستخدمة	Observation
BRADJI Abdallah	Maître de Conférences A	Université Badji Mokhtar-Annaba	Chef de Projet
BERKANE Ahmed	Maître de Conférences B	Université Badji Mokhtar-Annaba	
MESSIKH Chahrazed	Maître Assistante A	Université Badji Mokhtar-Annaba	
EKKEHARD Holzbecker	Professor	Georg-August Univ, Göttingen, Allemagne	Allemagne
MESSIKH Nabil	Maître de Conférences B	Université 20 Aout, Skikda	

## **Déroulement du projet :**

Rappeler brièvement les objectifs du projet et les tâches prévues

### **Les objectifs :**

1. Études mathématiques de quelques modèles récents de dynamique de Gaz
2. Proposition des schémas numériques, basés sur la méthode de volumes et éléments finis, pour ces modèles
3. L'étude numérique de ces schémas : stabilités, convergence
4. Elaboration des programmes (codes) pour ces modèles.

### **Les tâches prévues :**

Un mémoire sur les modèles classiques et récents en dynamique de Gaz

2. L'analyse mathématique (existence et unicité, comportement asymptotique) des modèles récents en dynamique de Gaz
3. Proposition des schémas numériques, éléments finis, et volumes finis pour ces modèles récents
4. La convergence de ces schémas
5. L'utilisation de COMSOL Multiphysics pour étudier quelques Schémas numérique d'éléments finis.

# TABLE DE MATIERES

1. Introduction .....	Page 5
2. Liste de contributions réalisées -----	Page 7
3. Contenu du Travail : Aperçu Général .....	Page 9
4. Description de Quelques Travaux Réalisés .....	Page 12
a. Premier travail .....	Page 12
b. Deuxième travail .....	Page 33
c. Troisième travail .....	Page 35
d. Quatrième travail .....	Page 37
e. Cinquième travail .....	Page 39
f. Sixième travail .....	Page 41
g. Septième travail .....	Page 43
h. Huitième travail .....	Page 45
i. Neuvième travail .....	Page 47
j. Dixième travail .....	Page 49
k. Un exemple d'un code réalisé par Scilab -----	Page 51
5. Conclusions .....	Page 54
6. Dépenses -----	Page 55
7. Références -----	Page 56

# INTRODUCTION

Dynamique des Gaz est une branche très intéressante en Dynamique de Fluides. C'est la branche de Physique qui traite de l'écoulement d'un Gaz et des effets mécaniques, thermiques, et autres, cf. Després et Dubois (2005). Les applications des modèles de Dynamique de Gaz sont nombreux. On trouve ces modèles, par exemple, La modélisation des Bassins, voir Atfeh (2010). Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant du point de vue de leur étude mathématique que de celui de leur approximation numérique. En effet, les résultats abstraits décrits par exemple dans le second tome du livre de Pierre-Louis Lions (1996) ne portent que sur des modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs. Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que chocs et détentes sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis est de celles-ci, voir Feistauer et al. [2004] et Eymard et al. [2000]. Elle est née d'une numérisation naturelle des lois de conservation fondamentales de la physique des milieux continus et elle permet une capture correcte des discontinuités admissibles sans avoir à les détecter au préalable. Le but de ce projet, donc, est l'étude mathématique (existence et unicité) et numérique (proposition des schémas numériques basé sur les méthodes des éléments et volumes finis) de quelques modèles de dynamique de Gaz. On se concentre particulièrement sur les modèles récents de dynamique de Gaz.

Comme la production et l'exploitation de Gaz est très important de point de vue économique, beaucoup de travaux de recherche ont été concentré sur les modèles de Dynamique de Gaz. L'étude mathématique de ces modèles nous permet de comprendre pas mal de phénomènes observés au terrains. Les modèles de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant du point de vue de leur étude mathématique que de celui de leur approximation numérique. On trouve, par exemple, une étude claire et (mais un peu abstraite) pour certains modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs dans le second tome du livre de Pierre Louis Lions (1996). Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que chocs et détentes sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis, voir Eymard et al. (2000), est de celles-ci. Par la méthode de volumes finis, on traite les lois de conservation fondamentales de la physique des milieux continus et elle permet une capture correcte des discontinuités admissibles sans avoir à les détecter au préalable. Nous abordons dans ce projet l'analyse mathématique et numérique (en utilisant les méthodes des volumes et éléments finis) de quelques modèles récents de dynamique de Gaz. Un exemple de tels modèles est le système d'Euler.

Les objectifs sont les suivants :

- Études mathématiques de quelques modèles récents de dynamique de Gaz
- Proposition des schémas numériques, basés sur la méthode de volumes et éléments finis, pour ces modèles
- L'étude numérique de ces schémas : stabilité, convergence
- Elaboration des programmes (codes) pour ces modèles.

Littérature mathématique (incluant coté numérique) concernant les modèles de dynamique de Gaz (Ces modèles en général sont des lois de conservations) est assez riche a cause de l'importance du domaine de Gaz, voir les références Eymard et al. (2000), Feistauer et al. (2004), Despres et al. (2005), Feziou (1996), et Godlewski et al. (1996) . En effet, Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant du point de vue de leur étude mathématique que de celui de leur approximation numérique. On trouve pas mal de résultats abstrait

concernant certains modèles de Dynamique de Gaz dans le second tome du livre de Pierre Louis Lions (1996). Dans le livre récent de Despres et al (2005) un exposé assez riche sur les modèles existants en dynamique de Gaz ainsi que l'approximation numérique de ces modèles. On trouve dans l'archive de IFP (Institut Français du Pétrole) une Littérature assez large qui nous permet de s'orienter vers le bon chemin. D'un autre part, existent aussi des travaux intéressants en volumes finis pour les systèmes d'Euler (est un modèle de dynamique de Gaz). A l'aide de cette littérature en dynamique de Gaz et les méthodes connues en volumes finis, on essaye de construire des nouveaux schémas numériques pour les modèles les plus récents en dynamique de Gaz. Notre bagage (comme un équipe) nous permet de tester d'abord si ces modèles sont bien posés (la solution existe et unique) et de passer de savoir si ces schémas convergent. On va utiliser dans ce cadre le COMSOL Multiphysics pour tester la convergence des schémas d'éléments finis.

Dans ce Rapport, on essaye de faire un synthèse des travaux réalisés dans le cadre de ce projet PNR. On donne aussi les dépenses.

Notons finalement que le financement que nous eu dans le cadre de projet était vraiment utile pour la production scientifique. On note particulièrement les résultats suivants :

1. Plusieurs publications (plus de 10 articles) dans des revues internationales renommées, voir les publications citées après.
2. L'ensemble de contributions obtenu par L'enseignante Messikh Chahrazed (membre a notre projet) va l'aider à soutenir sa thèse de Doctorat.
3. Collaborations scientifiques internationales avec Juergen Fuhrmann (Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin-Allemagne), voir les contributions ci –après.
4. Des citations de notre projet PNR dans quelques de nos contributions.

L'organisation de ce rapport est comme suit : on donne tout d'abord un aperçu général sur les travaux réalisés. Cet aperçu est donné a travers une description pour les axes de notre travail : a savoir les taches principales. Après, on donne une idée sur chaque travail réalisé. Pour chaque travail réalisé, on donne sa première page. Finalement, on donne notre dépenses financières.

## LISTE DE QUELQUES CONTRIBUTIONS REALISEES

1. **Un mémoire sur la dynamique de Gaz et quelques modèles mathématique en dynamique de Gaz** : Ce travail a été fait par **Messikh Nabil**.
2. **L'analyse Mathématiques de quelques modèles simples en dynamique de Gaz:**
  - 2.1: **Ahmed Berkane** : On the oscillation of the solutions of some coupled hyperbolic problems with delays. Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 108, 5363-5384  
<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2013/ams-105-108-2013/berkaneAMS105-108-2013.pdf>
  - 2.2 : **Messikh Chahrazed** : Blow-up of solution in a nonlinearly damped plate system Advances and Applications in Mathematical Sciences, Vol. 12, Issue 2. 41--48. 2012  
Voir: [http://mililink.com/issue\\_content.php?id=59&ild=222](http://mililink.com/issue_content.php?id=59&ild=222)
  - 2.3 : **Messikh Chahrazed** : A Blow up result in the Cauchy Problem for a semi-linear accretive wave equation GJSFR, Vol. 11 Issue 4, 1--9. 2011  
Voir: <http://journalofscience.org/index.php/GJSFR/article/view/242>
3. **L'analyse Numérique de quelques modèles en dynamique de Gaz ou des modèles qui ont des relations (ou intervient dans) avec dynamique de Gaz:**
  - 3.1. **Abdallah Bradji** : An analysis of a second order time accurate scheme for a finite volume method for parabolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes . Applied Mathematics and Computation, 219/11, 6354--6371, 2013  
Voir : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312013264>
  - 3.2. **Abdallah Bradji** : Convergence analysis of some high--order time accurate schemes for a finite volume method for second order hyperbolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes Numerical Methods for Partial Differential Equations, 29/4, 1278--1321, 2013  
Voir: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/num.21755/abstract>
  - 3.3. **Abdallah Bradji** : A theoretical analysis of a new finite volume scheme for second order hyperbolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes. Numerical Methods for Partial Differential Equations , 29/1, 1--39, 2013  
Voir: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/num.21697/abstract>
  - 3.4. **Abdallah Bradji** : Some abstract error estimates of a finite volume scheme for a nonstationary heat equation on general nonconforming multidimensional spatial meshes. Avec Juergen Fuhrmann. WIAS Preprint No. 1660, (2011). Applications of Mathematics, Praha, 58/1, 1--38, 2013  
Voir: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10492-013-0001-y>
  - 3.5. **Abdallah Bradji** : A new error estimate for a Crank--Nicolson finite element scheme for parabolic equations. Avec Juergen Fuhrmann. Communication présentée a Equadiff 13.  
Voir: <http://equadiff.zcu.cz/Abstract/Contributed/Bradji.pdf>  
(Remarque: un papier détaillé de cette communication apparaîtra dans un issue special de journal [Mathematica Bohemica](#) )
  - 3.6. **Abdallah Bradji** : Some new error estimates for finite element methods for the acoustic wave equation using the Newmark method. Avec Juergen Fuhrmann

Communication présentée a Equadiff 13

Voir : <http://equadiff.zcu.cz/Abstract/Contributed/Bradji2.pdf>

(**Remarque**: un papier détaillé de cette communication apparaîtra dans un issue special de journal [Mathematica Bohemica](#) )

- 3.7. **Ekkehard Holezbecker** : A Novel Modeling Approach Using Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Method for the Flow Simulation in Unconfined Aquifers  
Computers and Geosciences, Vol. 62, Pages 88—94  
Voir : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300413002641>
  
- 3.8. **Ekkehard Holezbecker** : Rock Deformation due to Geothermal Heat Production – a Modelling Study. Apparaîtra dans OIL GAS European Magazine.  
Voir un lien sur ce Journal: <http://www.oilgaspublisher.de/en/periodicals/og.html>



# CONTENU DU TRAVAIL

## Aperçu Général

Les résultats réalisés comportent sur quatre axes fondamentaux :

### **Premier axe : Dynamique de Gaz et les mathématiques**

Un mémoire sur la dynamique de Gaz et quelques modèles mathématique en dynamique de Gaz.

Ce mémoire a été fait par le membre Dr. Messik, Nabil (Département de Chimie, Université Skikda). Le rapport présente une formulation d'un problème de dynamique de gaz : écoulement non permanent des gaz dans les gazoducs.

En effet, L'étude de la dynamique des fluides (liquide ou gaz) remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique de fluide. Aujourd'hui, la dynamique de fluide est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

La dynamique des fluides est une discipline qui traite l'écoulement d'un fluide et les effets mécaniques, thermiques et autres, qu'il engendre ou qu'il lui associés. Le domaine d'application, dont l'étendue est considérable, touche également plusieurs autres sciences. La dynamique des fluides englobe ainsi tous les phénomènes d'écoulement qui se présentent, par exemple, quotidiennement dans notre environnement immédiat, dans l'atmosphère et les océans de la terres, dans l'espace, dans de très nombreuses machines comme les turbines, autour d'un avion ou d'un bateau, dans le système sanguin du corps humain, dans les ondes de choc et acoustiques, etc.

Vu par un physicien, la dynamique des fluides constitue une branche de la physique. En revanche, pour un mathématicien il s'agit d'une branche mathématique appliquée. Par ailleurs, vue les soucis d'applications d'ingénierie, l'ingénieur la voit comme une science qui s'appuie, en grande partie, sur l'expérience. En effet, la science de la dynamique des fluides est un ensemble constitué de tous ces composantes car la science est ensemble ordonné et systématique de connaissances établies par l'analyse théorique, l'observation et l'expérience. A vrai dire, l'étude de la dynamique des fluides ne peut être effectuée en profondeur qu'avec une maîtrise considérable de mathématique.

Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant de point de vue de leur étude mathématique que celui de leur approximation numérique. En effet, certains résultats abstraits récents ne portent que sur des modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs. Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que les chocs et détente sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis est de celles-ci.

### **Deuxième axe : L'analyse Mathématiques de quelques modèles simples en dynamique de Gaz**

Dans cet axe, des travaux ont été publiés et des communications ont été présentées sur l'analyse Mathématique de quelques modèles qui ont des relations (ou interviennent) avec Dynamique de Gaz.

Ces travaux concernent deux phénomènes :

-Phénomène d'explosion pour les équations aux dérivées partielles. Ce phénomène très important en pratique et en physique consiste à étudier si une solution (qui représente par exemple une quantité physique) d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles va exploser dans un temps fini ou non.

-L'oscillation des équations différentielles : l'oscillation des équations différentielles est importante de point de vue mathématique et pratique. Ce phénomène consiste si une solution est oscillante ou non. Une fonction oscillante signifie qu'elle admet des zéros à partir de n'importe quel temps.

### **Troisième axe : L'analyse Numérique de quelques modèles simples en dynamique de Gaz.**

Nous avons commencé par quelques modèles simples qui interviennent dans le domaine de Dynamique de Gaz, équation de la chaleur, équation d'onde.

On compte d'étudier des modèles plus compliqués et plus généraux dans le futur proche

Pour approximer ces modèles, nous avons utilisé la méthode de Volumes Finis.

- La méthode de Volumes Finis : La méthode des volumes finis est une méthode numérique utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible)

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

Pour les modèles que nous avons considérés sont des modèles qui interviennent dans des modèles généraux de Dynamique de Gaz.

-Modèle d'équation de la Chaleur : En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, introduite initialement en 1811 par Fourier pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Elle est aussi utilisée en mathématiques financières (équation de Black-Scholes).

Il est intéressant de remarquer que l'équation de la chaleur, introduite initialement pour décrire la conduction thermique, apparaît également dans d'autres branches de la physique théorique. Elle permet par exemple de décrire :

A. le phénomène de diffusion ;

B. Certains aspects probabilistes du mouvement brownien ;

Enfin, il existe un lien avec la mécanique quantique non-relativiste : l'équation de Schrödinger apparaît en effet comme une équation de la chaleur en temps imaginaire<sup>2</sup>. Loin d'être une simple curiosité, cette propriété autorise des développements intéressants, car il est souvent plus facile mathématiquement de travailler avec l'équation de la chaleur qu'avec l'équation de Schrödinger.

-Modèle d'équation d'Onde : L'équation d'onde est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.

**Quatrième axe : Simulation numériques et quelques codes.**

Des travaux ont été faits par les membres Dr. Bradji, Abdallah et Prof. Ekkehard, Holzbecker qui consistent la simulation numérique et des codes en Scilab (Matlab) pour des modèles ont des relations avec la Dynamique de Gaz.

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**  
**DANS LE CADRE DE**  
**DE PROJET**

**Le premier travail : Mémoire sur la Dynamique de Gaz**



Laboratoire Mathématique Appliquée (LMA)

Projet PNR (Fondamentale)

Laboratoire Mathématique Appliquée (LMA)

Projet PNR (Fondamentale)

Thème

*Etude Mathématique et numérique pour quelques modèles de la dynamique de gaz, exemple d'un système des équations d'Euler de la dynamique des gaz*

Tâche I

ETUDE ET FORMULATION D'UN PROBLÈME  
SUR L'ÉCOULEMENT NON PERMANENT DU  
FLUIDE DANS LES GAZODUCS

Tache réalisée par :

Dr. Messikh Nabil

## Introduction :

L'étude de la dynamique des fluides (liquide ou gaz) remonte au moins à l'époque de la Grèce antique avec le célèbre savon Archimède, connu par son principe qui fut à l'origine de la statique de fluide. Aujourd'hui, la dynamique de fluide est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

La dynamique des fluides est une discipline qui traite l'écoulement d'un fluide et les effets mécaniques, thermiques et autres, qu'il engendre ou qu'il lui associés. Le domaine d'application, dont l'étendue est considérable, touche également plusieurs autres sciences. La dynamique des fluides englobe ainsi tous les phénomènes d'écoulement qui se présentent, par exemple, quotidiennement dans notre environnement immédiat, dans l'atmosphère et les océans de la terres, dans l'espace, dans de très nombreuses machines comme les turbines, autour d'un avion ou d'un bateau, dans le système sanguin du corps humain, dans les ondes de choc et acoustiques, etc.

Vu par un physicien, la dynamique des fluides constitue une branche de la physique. En revanche, pour un mathématicien il s'agit d'une branche mathématique appliquée. Par ailleurs, vue les soucis d'applications d'ingénierie, l'ingénieur la voit comme une science qui s'appuie, en grande partie, sur l'expérience. En effet, la science de la dynamique des fluides est un ensemble constitué de tous ces composantes car la science est ensemble ordonné et systématique de connaissances établies par l'analyse théorique, l'observation et l'expérience. A vrai dire, l'étude de la dynamique des fluides ne peut être effectuée en profondeur qu'avec une maîtrise considérable de mathématique.

Les équations de la dynamique des gaz constituent un domaine de recherche en constante activité tant de point de vue de leur étude mathématique que celui de leur approximation numérique. En effet, certains résultats abstraits récents ne portent que sur des modèles relativement simples en regard du besoin des ingénieurs. Aussi les méthodes d'approximation les plus efficaces et populaires pour représenter les ondes non linéaires telles que les chocs et détentes sont également les plus rustiques. La méthode des volumes finis est de celles-ci.

Ce rapport présente une formulation d'un problème de dynamique de gaz : écoulement non permanent des gaz dans les gazoducs. Ce modèle sera l'objet des tâches suivantes.

# Chapitre I : Généralité sur Dynamique des fluides

## 1. Introduction :

En dynamique des fluides, on considère l'écoulement des fluides du point de vue macroscopique, c'est-à-dire du point de vue de milieux continus. Dans ce cadre, bien qu'un élément du fluide soit composé d'un très grand nombre de molécules, c'est aux propriétés moyennes de cet élément macroscopique que l'on s'intéresse.

On entend par une particule de fluide un élément de fluide qui est infinitésimal au sens mathématique, c'est-à-dire assimilée à un point en analogie avec la motion de point matériel en mécanique rationnelle. Ainsi on admet qu'une particule de fluide a les mêmes propriétés en tous ses points (isotropes).

## 2. Définitions :

Un fluide (liquide ou gaz) peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libre de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, et qui peut s'écouler. Les forces de cohésions entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient.[1-3]

Selon la définition élémentaire, un liquide a un volume propre, mais pas de forme propre, alors qu'un gaz n'a pas de volume propre mais tend à occuper tout l'espace qui lui est offert.

Dans un liquide, où les forces d'interactions moléculaires caractérisent sa liquidité, le mouvement des molécules est contrôlé par la conservation d'une distance entre ces molécules correspondant environ à leur taille. Cependant, dans la phase gazeuse, ces forces n'interviennent que très peu. Les molécules d'un gaz sont en mouvement désordonné sans prendre en considération les grandes distances entre eux par rapport à leur dimension.

### **2.1. Fluides parfait :**

Un fluide parfait, dont l'écoulement se fait sans frottements internes, est un fluide considéré comme non visqueux. Le modèle du fluide parfait permet de rendre compte assez convenablement de la structure de certaines régions d'écoulements réels ou de la modéliser, mais jamais de la structure complète de ceux-ci.[2-4]

### **2.2. Fluides visqueux :**

La viscosité d'un fluide, qui est la propriété inverse de la fluidité, est la caractéristique de résistance au glissement ou la déformation d'un fluide. Ces forces de résistances proviennent du fait que les couches des fluides en mouvement ne peuvent pas glisser indépendamment et librement les unes sur les autres. Ce qui donne naissance à des forces des frottements qui s'opposent directement à l'écoulement. Dans les liquides, elle est inversement proportionnelle à la température, elle augmente avec la température dans le cas d'une phase gazeuse. [2-4]

### **2.3. Fluides newtoniens :**

Ces fluides possèdent une viscosité indépendante de la contrainte appliquée ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température (eau, solvant l'air et la plus part des gaz).

### **2.4. Fluides non newtoniens :**

Ces fluides ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent (le sang, les suspensions, les émulsions...)

### **2.5. Fluides incompressibles :**

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles. [2-4]

### **2.6. Fluides compressibles :**



Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides incompressible.

### 3. Ecoulement des fluides :

A part le critère physique qui distingue écoulements compressibles et incompressibles, ainsi qu'un écoulement visqueux ou non visqueux, il existe d'autres critères qui distinguent les écoulements de fluides. [4-6]

a- *le critère géométrique :*

- Les écoulements internes : ils s'effectuent à l'intérieur d'une conduite (rivière, canal)
- Les écoulements externes : ils se font autour des corps solides (navire ou avion).

b- *les critères cinématiques :*

- Les écoulements uniformes, si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace.
- Les écoulements permanents : si ses composantes de vitesse sont indépendantes du temps.

En aérodynamique, selon le nombre de Mach  $\epsilon$  (le rapport de la vitesse de l'écoulement à la vitesse du son) on peut distinguer l'écoulement subsonique ( $\epsilon < 1$ ), l'écoulement supersonique ( $1 < \epsilon < 5$ ) et hypersonique ( $\epsilon > 5$ ). Si le nombre de Mach est proche de l'unité on parle d'un écoulement transsonique.[6]

Une dernière distinction concernant les écoulements laminaires où l'écoulement peut être décrit comme un ensemble de lames ( filets, couches) de fluide qui glissent les unes sur les autres et les écoulement turbulents où on ne peut plus définir de lames de fluides qui garderaient leur individualité. Un écoulement turbulent est caractérisé par son irrégularité temporelle et spatiale.

### 4. Description du mouvement d'un fluide :

#### 4.1. Description eulérienne et lagrangienne d'un fluide

En dynamique des fluides, une particule macroscopique de fluide est un élément de fluide de petit volume  $dV$  se trouvant en un point  $M$  ( $r=OM$ ) à l'instant  $t$ , définit un champs de vecteurs  $v(r,t)$ .

Dans la description *eulérienne* du mouvement d'un fluide, on s'intéresse à la vitesse  $v(r,t)$  d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant  $t$  avec le point fixe  $M$  de vecteur de position  $r$  ; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules différentes. A un instant ultérieur  $t$  , la vitesse au même point  $r$  sera  $v(r,t)$  .[8,9]

Dans la description *lagrangienne*, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position  $r_0$  ( $r_0=OM_0$ ) à une instante référence donnée  $t_0$ . la vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur  $v(r_0,t)$  qui est en fonction des deux variables  $r_0$  et  $t$ .

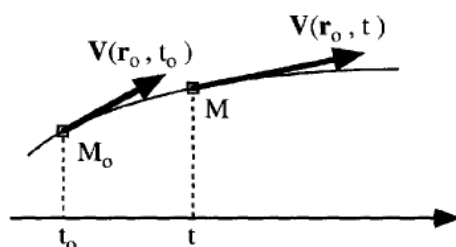


Fig II .1 : Description lagrangienne du mouvement d'un fluide

La description eulérienne est plus commode pour étudier le mouvement d'un fluide dans son ensemble car on ne s'intéresse plus généralement au mouvement d'une seule particule mais à celui de l'ensemble des particules qui le constituent.

#### 4.2. Lignes et tubes de courant, trajectoires, lignes d'émission :

Les lignes de courant sont les lignes du champs de vecteurs  $v(r,t)$  ; elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse  $v(x,y,z,t_0)$  à un instant donné

$t_0$ . Un tube de courant est l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

Mathématiquement, ces lignes sont définies comme les courbes auxquelles le vecteur vitesse est tangent. En notant  $dM (dx,dy,dz)$  un petit déplacement le long de la ligne d'un point  $M(x,y,z)$ , on a :

$$dM \wedge v = 0 \quad 1.1$$

Soit :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad 1.2$$

On obtient l'équation des lignes de courant par intégration de ces deux équations différentielles.

La trajectoire d'une particule de fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement. On les obtient mathématiquement, par intégration temporelle du champs de vitesse lagrangien  $v(r_0,t)$  c'est-à-dire du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x(r_0,t) \\ \frac{dy}{dt} &= v_y(r_0,t) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z(r_0,t) \end{aligned} \quad 1.3$$

En effet, soit  $r$  la position de la particule de fluide à l'instant  $t$ , et  $r+dr$  sa position à l'instant  $t+dt$  ; on a, par définition de la vitesse lagrangienne  $v_x(r_0,t)$  (particule suivie dans son environnement) :

$$v(r_0,t) = \frac{dr}{dt} \quad 1.4$$

d'où par intégration :

$$r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t v(r_0, t) dt \quad 1.5$$

Une ligne d'émission représente l'ensemble des positions successives d'une particule de fluide ayant coïncidé à un instant antérieur avec un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le champ de vitesse ne dépend pas explicitement du temps, et on a

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad 1.6$$

Dans ce cas, les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission coïncident. En effet, les différentes particules émises d'un même point au cours du temps ont les mêmes trajectoires : elles représentent donc en même temps les lignes d'émission. Par ailleurs, le vecteur de vitesse local (indépendant du temps) est tangent en chaque point aux trajectoires qui représentent donc également les lignes de courant.

Au contraire, dans le cas d'un écoulement non stationnaire ces différentes lignes sont en général distinctes, et la correspondance entre elles est difficile à étudier. On s'intéresse alors en général aux lignes de courant.

## 5. Dynamique :

La dynamique des fluides est basée sur la relation fondamentale de la mécanique appliquée à chaque élément de fluide en tenant compte de la spécificité des forces qui s'exercent sur la particule de fluide.

### 5.1. Equation d'Euler :

Le fluide parfait est soumis, en plus des forces pressantes, aux seules forces pesanteur. Partant de cette hypothèse, appliquons la relation fondamentale de la dynamique à un élément de fluide parfait, de masse  $dm = \rho dV$ , dans un référentiel galiléen R, il vient : [9-11]

$$\rho dV \vec{a} = -(\overline{\text{grad}P}) dV + \rho \vec{g} dV \quad 1.7$$

Où  $-\overrightarrow{gradP}dV$  est la résultante des forces pressantes exercées sur la surface délimitant l'élément de volume  $dV$  et  $\rho\vec{g}dV$  la résultante des forces de pesanteur,  $\vec{a}$  est l'accélération particulaire c'est à dire l'accélération de la particule de fluide qui se trouve en un point  $M$  à l'instant  $t$  le long de la trajectoire.

## Chapitre II : Ecoulement non permanent des gaz dans les conduites cylindriques

Plusieurs auteurs ont traité certains modèles de la dynamique des gaz à savoir : aérodynamique externe des véhicules, amélioration des performances de cycliste, étude aérodynamique d'une éolienne ...etc. Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à étudier l'écoulement non permanent des gaz dans les conduites cylindriques horizontales.

Les difficultés mathématiques soulevées par les équations qui décrivent l'écoulement non permanent, et qui sont dues à l'absence d'une méthode de résolution ayant un degré d'approximation satisfaisant pour les applications pratiques

### II.1-Ecoulement non permanent dans les conduites :

L'étude de l'écoulement non permanent des fluides compressibles dans les conduites cylindriques horizontales a pour objet la détermination de la pression  $p(x,t)$ , de la masse spécifique  $\rho(x,t)$ , de la vitesse  $v(x,t)$  et de la température  $T(x,t)$  du fluide en chaque point de l'espace qu'il occupe. Cette L'équation thermodynamique d'état et les équations de la continuité, du mouvement et de la conservation d'énergie sont nécessaires pour établir les paramètres de l'écoulement mentionnés ci-dessus.[12]

#### II.1.1.Equation thermodynamique d'état

L'équation thermodynamique d'état exprime la dépendance fonctionnelle qui lie la pression, la masse spécifique et la température des gaz. Une telle relation est en générale de la forme :

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (\text{II.1.a})$$

La loi des gaz parfaits ne convient généralement pas pour la description du comportement des gaz réels notamment dans le cas des hautes pressions. Plusieurs équations d'état ont été proposées dans la littérature dans le but de modéliser de façon

réaliste le comportement du gaz sur une large plage de pression et de température : équation de Viriel, équations d'état analytiques, et équations d'états non analytiques. Le choix de l'équation dépend certainement du domaine de l'application envisagée mais aussi de la disponibilité des informations nécessaires pour la détermination des coefficients libres de cette équation.

L'équation de Viriel, tronquée au deuxième ou troisième coefficient en raison des difficultés rencontrées dans le calcul des coefficients d'ordre élevé, ne traduit pas les effets observés à haute pression, ce qui limite certainement le champ d'application du modèle d'écoulement choisi [10-12]. Les équations analytiques requièrent un nombre de paramètres limité et peuvent être résolue de manière analytique tout en conduisant à une bonne estimation du comportement des gaz en dehors de la zone critique. Les équations non analytiques sont généralement plus précises mais nécessitent de connaître un grand nombre de constantes qui peuvent être difficiles à obtenir dans la littérature. Ainsi, notre choix se porte sur l'équation d'état analytique suivante :

$$P = \frac{1}{V_{mol} - b} \left[ RT - a \frac{V_{mol} - a_0}{V_{mol}^2 + b_1 V_{mol} + b_0} \right] \quad (II.1.b)$$

où les cinq paramètres du modèle peuvent être constants, égaux à zéro ou fonction de la température et/ou de la composition du fluide (mélange de gaz par exemple) suivant le modèle choisi. La loi des gaz parfaits et la loi de van der Waal sont des cas particulier de cette équation.

### II.1.2. Equation de continuité

L'équation de continuité traduit la loi de conservation de la masse et s'exprime dans le cas d'un écoulement des gaz dans une conduite de section constante  $F$  par la relation :

$$\frac{\partial(\rho F)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v F)}{\partial x} = F \left( \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) = 0 \quad (II.2)$$

où  $v$  est la vitesse moyenne sur la section, cette vitesse est définie par la relation :

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{1}{F} \iint_F v dF \quad (II.3)$$

où  $Q$  est le débit de fluide qui passe par la section  $F$ . En introduisant la notation :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (II.4)$$

où  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde de pression, l'équation (II.2) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (II.5)$$

Elle peut également s'écrire sous la forme :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \quad (II.6)$$

### II.1.3. Equation du mouvement

Cette équation exprime l'équilibre dynamique des forces massiques, d'inertie, de pression et de frottement. Si l'écoulement est laminaire, l'équilibre dynamique des forces s'exprime par les équations de Navier-Stokes qui, pour une conduite horizontale, deviennent :



$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (\text{II.7})$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide. En régime turbulent, la perte de pression due au frottement est déterminée au moyen de la relation suivante (loi de Weisbach-Darey) :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -F(\rho, v) = -\frac{\lambda}{2d} \rho v^2 \quad (\text{II.8})$$

où  $d$  est le diamètre de la conduite et  $\lambda$  est le coefficient de frottement hydrodynamique. Le coefficient  $\lambda$  dépend en général du nombre de Reynolds, de la rugosité relative  $z = 2k/d$  (le paramètre  $k$  représente la rugosité équivalente absolue), et de la forme et de la distribution des aspérités sur la surface de la conduite. En considérant une valeur moyenne de la vitesse sur la section de la conduite et en tenant compte de la relation (II.8) qui détermine la perte de pression due au frottement, l'équation du mouvement s'écrit alors sous la forme :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + F(\rho, v) = 0 \quad (\text{II.9})$$

En introduisant l'équation de continuité (1.6) dans l'équation du mouvement (II.9) on trouve une autre forme de l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + F(\rho, v) = 0 \quad (\text{II.10})$$

D'autre part, de (II.4) on déduit que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{II.11})$$

Maintenant en utilisant l'équation (II.11), l'équation de continuité (II.6) et l'équation du mouvement (II.10), on trouve finalement une autre forme de l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + F(\rho, v) = 0 \quad (\text{II.12})$$

#### II.1.4. Equation de l'énergie

Conformément au premier principe de la thermodynamique, l'équation de la conservation d'énergie résulte de la condition que la variation de l'énergie interne et cinétique du fluide en mouvement est égale au travail mécanique de toutes les forces extérieures et intérieures plus l'énergie thermique fournie au milieu ambiant. Sous la condition d'absence de machines hydrauliques le long de la conduite, si l'on admet que la vitesse et la température ne varient qu'en fonction de la longueur de la conduite, en prenant des valeurs moyennes sur la section de celle-ci, l'équation de la conservation de l'énergie pour l'écoulement non permanent peut alors être écrite sous la forme [13] :

$$gq \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( U + \frac{p}{\gamma} \right) \right] + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{\gamma T}{A} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{A} \pi d K [T_p(x) - T] \quad (\text{II.13})$$

où  $q = \rho v$  est la vitesse massique,  $T_p(x)$  est la température du milieu ambiant,  $K$  est le coefficient global de transfert de chaleur,  $A$  est l'équivalent calorifique du travail mécanique et  $\gamma$  est le poids spécifique.

A l'aide des relations thermodynamiques suivantes :

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - A \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp$$

$$dH = c_p dT + AV \left[ 1 - \frac{T}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (II.14)$$

L'équation (II.13) devient :

$$\frac{Aq}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + A\rho \frac{\partial v^2}{\partial t} + \delta g q c_p \frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \cdot c_p \beta \frac{\partial p}{\partial t} + g q c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \gamma \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\pi d K}{F} [T_p(x) - T] \quad (II.15)$$

avec

$$\beta = \frac{AT}{c_p} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$\delta = \frac{A}{c_p} \left[ \frac{1}{\gamma} - T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] \quad (II.16)$$

## II.2.CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

L'étude de l'écoulement non permanent par conduites horizontales implique la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires à savoir (II.15), (II.1), (II.2) et (II.12). Ces solutions contiennent donc un certain nombre de fonctions arbitraires qu'on doit déterminer à l'aide des conditions initiales et aux limites qui résultent de la nature physique des problèmes étudiés. Pour cette raison on exposera les problèmes qui se posent couramment dans le transport des gaz par conduites et on présentera des conditions physiques auxquelles doit satisfaire la solution du système d'équations précédemment cité. Nous tenons tout de suite à signaler que la simplification des équations du modèle de l'écoulement à travers, par exemple l'élimination de la masse spécifique, des équations du modèle 'une étude de l'existence et de l'unicité de la solution est une phase fondamentale pour ajouter, réduire ou plus généralement choisir convenablement les contraintes liées aux conditions initiales et aux limites des problèmes étudiés.

Deux régimes sont possibles dans le transport des gaz en ce qui concerne le comportement dans le temps des paramètres de l'écoulement : le régime transitoire et le régime périodique variable. Il s'ensuit que pour chaque régime on a certaines conditions initiales et aux limites qui seront précisées ci-dessous.

### II.2.1. Régimes transitoires

L'écoulement transitoire apparaît lorsqu'on passe d'un régime permanent à un autre, ou lorsque le régime commence à partir de l'état de repos.

- **Conduites initialement exploitées avec des débits massiques fixes** : Si on considère le cas où les conduites exploitées en régime permanent, c'est-à-dire avec des débits massiques égaux aux deux extrémités et où, à un moment quelconque, surviennent des variations au point de consommation ou d'alimentation. Ces variations ont pour effet l'augmentation ou la réduction de la quantité de gaz qui se trouve dans la conduite, selon que le débit correspondant à la consommation est plus grand ou plus petit que le débit d'alimentation. Si on considère de plus qu'à l'instant initial la distribution de la température était permanente, c'est-à-dire le cas où le régime thermique de la conduite ne dépend pas du temps, dans ce cas, les fonctions de l'écoulement doivent satisfaire aux conditions initiales et aux limites suivantes :

Conditions initiales :

$$\text{Etat de repos} \quad : \quad q(x,0) = q_0; \quad p(x,0) = p_k; \quad T(x,0) = T_0(x)$$

$$\text{Régime permanent} : \quad q(x,0) = q_0; \quad p(x,0) = p_0(x); \quad T(x,0) = T_0(x)$$

Conditions aux limites :

$$q(0,t) = \varphi_1(t); \quad f \left( p \Big|_{x=0}, \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0}, \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \varphi_1(t), t \right) = 0; \quad (II.17)$$

$$q(l,t) = \varphi_2(t); \quad f \left( p \Big|_{x=l}, \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l}, \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_{x=l}, \varphi_2(t), t \right) = 0$$

- **Conduites alimentées à pression constante ou variable en fonction du temps** : Si on considère la situation de conduites alimentées à pression constante ou variable en fonction

du temps, deux cas peuvent se présenter au point de consommation en ce qui concerne la connaissance des conditions aux limites : soit une pression variable, soit un débit variable avec le temps. Comme dans le cas précédent on peut considérer qu'au moment initial l'écoulement est permanent ou il commence à partir de l'état de repos, en imposant comme conditions aux limites certaines valeurs de la pression ou du débit massique aux extrémités de la conduite. Les problèmes mentionnés ci-dessus conduisent aux conditions initiales et aux limites suivantes :

•

Conditions initiales :

Etat de repos :  $q(x,0) = q_0$ ;  $p(x,0) = p_k$ ;  $T(x,0) = T_0(x)$

Régime permanent :  $q(x,0) = q_0$ ;  $p(x,0) = p_0(x)$ ;  $T(x,0) = T_0(x)$

(II.18)

Conditions aux limites :

$p(0,t) = \psi_1(t)$ ;

$p(l,t) = \psi_2(t)$ ;

Conditions initiales :

Etat de repos :  $q(x,0) = q_0$ ;  $p(x,0) = p_k$ ;  $T(x,0) = T_0(x)$

Régime permanent :  $q(x,0) = q_0$ ;  $p(x,0) = p_0(x)$ ;  $T(x,0) = T_0(x)$

Conditions aux limites :

(II.19)

$$f\left(p\Big|_{x=0}, \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0}, \frac{\partial p^2}{\partial x}\Big|_{x=0}, \varphi_1(t), t\right) = 0;$$

$p(l,t) = \psi_2(t)$ ;

### II.2.2. Régime périodique variable

En dehors du régime transitoire il est possible d'observer une variation périodique du débit aux points de consommation. Dans ces conditions on peut établir l'évolution en fonction du temps du débit d'alimentation de la conduite sans tenir compte de la condition initiale, vu que l'effet de celle-ci se fait ressentir seulement pendant une période très courte après la mise en exploitation de la conduite. En exprimant la variation du débit au point de consommation par une série de Fourier, on aura les conditions aux limites suivantes :

Conditions aux limites :

$$q(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) - b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right) \quad (11.20)$$
$$q(l, t) = \varphi_2(t);$$

où  $T$  est la période de variation du débit massique.

### **II.3- Conclusion :**

Les difficultés mathématiques soulevées par les équations qui décrivent l'écoulement non permanent et qui sont dues à l'absence d'une méthode de résolution ayant un degré d'approximation satisfaisant pour les applications pratiques. La résolution effective des problèmes qui se posent en régime non permanent nécessite des connaissances mathématiques assez variées, surtout en ce qui concerne les équations aux dérivées partielles.

Les équations citées ci-dessus font l'objet de résolution dans les tâches successives.

## Bibliographies :

- 1- P .A.Bois, Introduction à la mécanique théoriques des fluides, Edition Ellipse,2004
- 2- C.Ancy, Note de cours dynamique des fluides, Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007
- 3- E.Guyon, J.P.Hulin,L.Petit, Hydrodynamique physique, Edition CNRS, 2007
- 4- R.K.Zeytounian, Mécanique des fluides fondamentaux, Springer 2001.
- 5- T.G.Elizonova, Quasi-gaz dynamic equation, edition Spring 2009
- 6- Z.Sallouma, Etude mathématique d'écoulement de fluides viscoélastique dans des domaines singuliers, thèse de doctorat, université Paris Est 2008
- 7- P.Chassaing, Mécanique des fluides :PC-PSI, Edition Rosny-Sous-Bois : Bréal2005
- 8- L.Borel,D.Favrat , Thermodynamique et énergétique, Edition Presses polytechniques romandes,2005
- 9- O.C.Zienkiewicz, R.LTaylor, P.Nithiarasu, The element for fluid dynamics, Elsevier Butterworth-Heinemann,2005
- 10-F.Boyer,P.Fabrine, Elements d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulement de fluides visqueux, Springer Vetag,2006.
- 11-B.Després, F.Dubois, Système hyperboliques de lois de conservation : application à la dynamique des gaz, Ecole polytechnique, Diffusion, Ellipse,2005.
- 12-H.Pascal, Ecoulement non permanent dans les gazoducs, Edition Technip,1972



## **DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Deuxième travail : Analyse Mathématique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Mrs. Messikh, Chahrazed**

<http://journalofscience.org/index.php/GJSFR/article/view/242>

### **Aperçu sur le travail**

Dans ce travail, l'auteur présente une étude sur le comportement asymptotique d'une équation d'onde non linéaire. Cette équation intervient dans des modèles généraux de Dynamique de Gaz. L'auteur étudié le phénomène d'explosion de cette équation.



GLOBAL JOURNAL OF SCIENCE FRONTIER RESEARCH  
Volume 11 Issue 4 Version 1.0 July 2011  
Type: Double Blind Peer Reviewed International Research Journal  
Publisher: Global Journals Inc. (USA)  
ISSN: 0975-5896

## A Blow up Result In The Cauchy Problem For A Semi-Linear Accretive Wave Equation

By Ch. Messikh

*University Badji Mokhtar, Algeria*

*Abstracts* - We investigate the blow up of the semi - linear wave equation given by  $u_{tt} - \Delta u = |u_t|^{p-1}u_t$ , and prove that for a given time  $T > 0$ , there exist always initial data with sufficiently negative initial energy for which the solution blows up in time  $\leq T$ .

*Keywords* : Wave equation, Negative initial energy, blow up, finite time.

*AMS Classification* : 35 L 45, 35 L 70.



*Strictly as per the compliance and regulations of:*



© 2011 . Ch. Messikh. This is a research/review paper, distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 3.0 Unported License <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>, permitting all non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**  
**DANS LE CADRE DE**  
**DE PROJET (Suite)**

**Le Troisième travail : Analyse Mathématique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Berkane, Ahmed**

<http://www.m-hikari.com/ams/ams-2013/ams-105-108-2013/berkaneAMS105-108-2013.pdf>

**Aperçu sur le travail**

**Dans ce travail, l'auteur présente une étude sur l'oscillation des équations hyperboliques avec retards. Notons que les équations avec retards sont importante de point de vue pratique.**

## On the Oscillation of the Solutions of Some Coupled Hyperbolic Problems with Delays

Ahmed Berkane

Department of Mathematics  
Faculty of Sciences, University of Badji Mokhtar-Annaba, Algeria  
aberkane20052005@yahoo.fr

Copyright © 2013 Ahmed Berkane. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

### Abstract

Oscillatory behavior of solutions of coupled hyperbolic partial differential equations is justified and generalized for a large class of problems. To achieve our goal, we use some techniques based essentially on some tools related to ordinary differential inequalities theory.

**Mathematics Subject Classification:** 35Q58, 35L20, 35R99, 35B05

**Keywords:** Oscillation; hyperbolic equation; delays

## 1 Introduction

In the past decade research on the oscillation theory has been very active and fruitful, and has attracted the attention of many mathematicians worldwide. The study of the oscillatory behavior of the solutions in hyperbolic differential equations of neutral type has been received a lot of attention and an increasing interest in recent years. To the best of our knowledge, it seems that the first attempt in this direction has been made by Mishev and Bainov [7]. They have obtained sufficient conditions for the oscillation of all solutions of a class of neutral hyperbolic equations with conditions at the boundary of the Neumann type.

Subsequently, Yoshida [17] has obtained sufficient conditions which guarantee the existence of bounded domains in which each solution of a neutral hyperbolic equation with boundary conditions of the Dirichlet, Neumann or Robin type has a zero.

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Quatrième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/num.21697/abstract>

**Aperçu sur le travail**

**Dans ce travail, l'auteur présente une schéma de volume fini d'ordre un pour une équation d'onde.**

# A Theoretical Analysis of a New Finite Volume Scheme for Second Order Hyperbolic Equations on General Nonconforming Multidimensional Spatial Meshes

Abdallah Bradji

Department of Mathematics, University of Annaba, Annaba, Algeria

Received 27 March 2011; accepted 12 October 2011

Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com).

DOI 10.1002/num.21697

We consider the wave equation, on a multidimensional spatial domain. The discretization of the spatial domain is performed using a general class of nonconforming meshes which has been recently studied for stationary anisotropic heterogeneous diffusion problems, see Eymard et al. (IMAJ Numer Anal 30 (2010), 1009–1043). The discretization in time is performed using a uniform mesh. We derive a new implicit finite volume scheme approximating the wave equation and we prove error estimates of the finite volume approximate solution in several norms which allow us to derive error estimates for the approximations of the exact solution and its first derivatives. We prove in particular, when the discrete flux is calculated using a stabilized discrete gradient, the convergence order is  $h_{\mathcal{D}} + k$ , where  $h_{\mathcal{D}}$  (resp.  $k$ ) is the mesh size of the spatial (resp. time) discretization. This estimate is valid under the regularity assumption  $u \in C^3([0, T]; C^2(\overline{\Omega}))$  for the exact solution  $u$ . The proof of these error estimates is based essentially on a comparison between the finite volume approximate solution and an auxiliary finite volume approximation. © 2012 Wiley Periodicals, Inc. Numer Methods Partial Differential Eq 000: 000–000, 2012

*Keywords:* discrete gradient; fully discretization scheme; implicit scheme; multidimensional spatial domain; nonconforming grid; second order hyperbolic equations; wave equation

## I. MOTIVATION AND DESCRIPTION OF THE MAIN RESULTS

We consider the following wave problem, as a model for second order hyperbolic problems:

$$u_{,tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

where  $\Omega$  is an open polygonal bounded subset in  $\mathbb{R}^d$  and  $f$  is a given function.

*Correspondence to:* Abdallah Bradji, Department of Mathematics, University of Annaba, Annaba, Algeria (e-mail: bradjji@cmi.univ-mrs.fr)

Contract grant sponsor: Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research; contract grant number: B01120090113

Contract grant sponsor: PNR Project EMNDG (ANDRU)

© 2012 Wiley Periodicals, Inc.

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Cinquième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a**

**la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/num.21755/abstract>

**Aperçu sur le travail**

Dans ce travail, l'auteur présente une schéma de volume fini d'ordre deux dans le temps un pour une équation d'onde.

# Convergence Analysis of Some High-Order Time Accurate Schemes for a Finite Volume Method for Second Order Hyperbolic Equations on General Nonconforming Multidimensional Spatial Meshes

Abdallah Bradji

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University Badji Mokhtar Annaba, Algeria

Received 22 December 2011; accepted 26 October 2012

Published online 5 December 2012 in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com).

DOI 10.1002/num.21755

The present work is an extension of our previous work (Bradji, Numer Methods Partial Differ Equations, to appear) which dealt with error analysis of a finite volume scheme of a first convergence order (both in time and space) for second-order hyperbolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes introduced recently in (Eymard et al. IMAJ Numer Anal 30(2010), 1009–1043). We aim in this article to get some higher-order time accurate schemes for a finite volume method for second-order hyperbolic equations using the same class of spatial generic meshes stated above.

We derive a family of finite volume schemes approximating the wave equation, as a model for second-order hyperbolic equations, in which the discretization in time is performed using a one-parameter scheme of the Newmark's method. We prove that the error estimate of these finite volume schemes is of order two (or four) in time and it is of optimal order in space.

These error estimates are analyzed in several norms which allow us to derive approximations for the exact solution and its first derivatives whose the convergence order is two (or four) in time and it is optimal in space.

We prove in particular, when the discrete flux is calculated using a stabilized discrete gradient, that the convergence order is  $k^2 + h_D$  or  $k^4 + h_D$ , where  $h_D$  (resp.  $k$ ) is the mesh size of the spatial (resp. time) discretization. These estimates are valid under the regularity assumption  $u \in C^4([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$ , when the schemes are second-order accurate in time, and  $u \in C^6([0, T]; C^2(\bar{\Omega}))$ , when the schemes are four-order accurate in time for the exact solution  $u$ .

The proof of these error estimates is based essentially on a comparison between the finite volume approximate solution and an auxiliary finite volume approximation. © 2012 Wiley Periodicals, Inc. Numer Methods Partial Differential Eq 29: 1278–1321, 2013

*Keywords:* discrete gradient; fully discretization scheme; multidimensional spatial domain; non-conforming grid; second and fourth-order time accurate; second-order hyperbolic equations; wave equation

*Correspondence to:* Abdallah Bradji, Department of Mathematics, University of Annaba Algeria (e-mail: bradji@cmi.univ-mrs.fr)

Contract grant sponsor: Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research (A.B.)

© 2012 Wiley Periodicals, Inc.



**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES  
DANS LE CADRE DE  
DE PROJET (Suite)**

**Le Sixième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

<http://link.springer.com/article/10.1007/s10492-013-0001-y>

**Aperçu sur le travail**

Dans ce travail, l'auteur présente une schéma de volume fini d'ordre un pour une équation de la chaleur.

SOME ABSTRACT ERROR ESTIMATES OF A FINITE  
VOLUME SCHEME FOR A NONSTATIONARY HEAT EQUATION  
ON GENERAL NONCONFORMING MULTIDIMENSIONAL  
SPATIAL MESHES

ABDALLAH BRADJI, Annaba, JÜRGEN FUHRMANN, Berlin

(Received January 31, 2011)

*Abstract.* A general class of nonconforming meshes has been recently studied for stationary anisotropic heterogeneous diffusion problems, see Eymard et al. (IMA J. Numer. Anal. 30 (2010), 1009–1043). Thanks to the basic ideas developed in the stated reference for stationary problems, we derive a new discretization scheme in order to approximate the nonstationary heat problem. The unknowns of this scheme are the values at the centre of the control volumes, at some internal interfaces, and at the mesh points of the time discretization.

We derive error estimates in discrete norms  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  and  $W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ , and an error estimate for an approximation of the gradient, in a general framework in which the discrete bilinear form involved in the finite volume scheme satisfies some ellipticity condition.

*Keywords:* non-conforming grid, nonstationary heat equation, several space dimension, SUSHI scheme, implicit scheme, discrete gradient

*MSC 2010:* 65M08, 65M15, 35K15

## 1. AIM OF THIS PAPER AND DESCRIPTION OF THE MAIN RESULTS

Let us consider the following heat problem:

$$(1.1) \quad u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

---

The first author was supported in part by Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research under Project # B01120090113 and the PNR Project EMNDG controlled by ANDRU.

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Septième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300312013264>

**Aperçu sur le travail**

Dans ce travail, l'auteur présente une schéma de volume fini d'ordre deux dans le temps pour l' équation de la chaleur.



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Applied Mathematics and Computation

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/amc](http://www.elsevier.com/locate/amc)

## An analysis of a second-order time accurate scheme for a finite volume method for parabolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes



Abdallah Bradji

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Badji Mokhtar-Annaba, Algeria

## ARTICLE INFO

## Keywords:

Non-conforming grid  
 Nonstationary heat equation  
 Several space dimension  
 SUSHI scheme  
 Implicit scheme  
 Discrete gradient  
 Second order time accurate  
 Optimal order in space

## ABSTRACT

The present work is an extension of our previous work (Bradji and Fuhrmann (2011) [4]) which dealt with error analysis of a finite volume scheme of first order (both in time and space) for parabolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes introduced recently in Eymard et al. (2010) [12]. We aim in this paper to get a higher-order time accurate scheme for a finite volume method for parabolic equations using the same class of spatial generic meshes stated above.

We derive a finite volume scheme approximating the heat equation, as a model for parabolic equations, in which the discretization in time is performed using the Crank–Nicolson method.

We derive an *a priori estimate* for the discrete problem and we prove that the error estimate of the finite volume scheme is of order two in time and it is of optimal order in space.

The error estimate is analysed in several norms which allow us to derive approximations for the exact solution and its first derivatives (both spatial and temporal) whose the convergence order is two in time and it is optimal in space.

We prove in particular, when the discrete flux is calculated using a stabilized discrete gradient, that the convergence order is  $k^2 + h_p$ , where  $h_p$  (resp.  $k$ ) is the mesh size of the spatial (resp. time) discretization. These estimates are valid under the regularity assumption  $u \in C^3([0, T]; C^2(\Omega))$  for the exact solution  $u$ .

The proof of these error estimates is based essentially on a *new a priori estimate* for the discrete problem and a comparison between the finite volume approximate solution and an auxiliary finite volume approximation.

© 2012 Elsevier Inc. All rights reserved.

### 1. Aim of this paper and description of the main results

Let us consider the following heat problem:

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1)$$

where  $\Omega$  is an open bounded polyhedral subset in  $\mathbb{R}^d$ , with  $d \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $T > 0$ , and  $f$  is a given function.

An initial condition is given by:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

and, for the sake of simplicity, we consider homogeneous Dirichlet boundary conditions, that is

E-mail address: [bradj@cmi.univ-mrs.fr](mailto:bradj@cmi.univ-mrs.fr)  
 URL: <http://www.latp.univ-mrs.fr/~bradj/>

## **DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Huitième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a**

**la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

### **Aperçu sur le travail**

**Dans ce travail, l'auteur présente une estimation d'erreur pour un schéma d'éléments finis d'ordre un pour une équation de la chaleur.**

**Remarque : le fichier ci-après est le copyright signé pour avoir la publication**

## Exclusive Licence Agreement

### Preamble

Application of the copyright in the Czech Republic is governed by the Copyright Act No. 121/2000 Coll. A precondition for the publisher to initiate the most widest publication process possible of a presented work is obtaining the licence to utilize the work. All the personal and property copyrights, as well as their exercising, belong in accordance with the above Act to the author.

In the event the work has originated as an employee's work all the copyrights are exercised by the employer. The party proposing/drafting this contract (publisher) assumes that the author exercises all the copyrights related to the work and that the below mentioned work - article is the result of a unique creative author's performance, that the work has not been published as yet, that no other person may claim any rights and titles to the work, that the work has not been encumbered with any rights of third parties, that the work is not an employee's work or a work made to order. If the situation is to the contrary, it is necessary that the author refers to the publisher (journal editor). Unless the author has done so, he/she confirms by his/her signature that the above publisher's assumption is true and if it is not so, the author is responsible to the publisher for the consequences resulting therefrom, namely, damages and other loss.

In accordance with the Czech law:

The publisher of *Mathematica Bohemica*,  
Matematický ústav Akademie věd České republiky  
(Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic)  
with its registered office at Žitná 25, 115 67 Praha 1,

Incorporation No.: 67985840, represented by the executive editor Zdeňka Crkalová

and the author

**BRADJI Abdallah**

have entered into the following Exclusive Licence Agreement on Utilization of the Copyright related to the article

**A new error estimate for a fully finite element discretization scheme for parabolic equations using Crank-Nicolson method**

If there are co-authors of the article, the author represents and warrants that he/she is entitled to represent them as an indirect proxy (to negotiate on his/her own behalf and on their account). The co-authors are as follows:

The author grants the publisher the exclusive unrestricted global licence (with an exception referred to hereinafter) to use the work - article, including also the title to publish the work, as a whole or in part, repeatedly or individually, independently or jointly (in a combination or within an assembly) with other works, in print or in an electronic way. The publisher obtains also the right to grant a sublicense, as well as the right to assign the licence. The licence is granted only as the entitling one. The publisher is entitled to withdraw from this Agreement in the event the publisher has decided not to utilize the licence for any reason whatsoever. If the publisher fails to exercise the title (to commence the utilization), whether as a whole or in part, within forty eight (48) months, at the latest, it shall be understood that the publisher will have withdrawn from the agreement one (1) day following the above period. If the publisher has withdrawn from the Agreement the author may use the work himself/herself or grant the licence to somebody else.

The author grants the licence to the publisher free of charge.

The publisher reserves the right to make indispensable adjustments of the work in the interest of unification of the style and of a correct language (grammar) of the contributions, and the author is agreeable therewith.

The agreement is entered for the entire period of duration of the property rights to the work.

The parties agree on the following exceptions from the licence exclusivity:

- the author is entitled to provide pre-prints and copies of the work and to extend them for the purpose of learning, internal need of his/her employer, and his/her personal utilization;
- the author is entitled to use, or agree with another use of, the work (licence) after the publication of the work in the publisher's journal for the purpose of publication of the author's monograph, in a technical report, collection/proceedings, subject to that with such utilization of the work it has been mentioned that it is a re-print from the above mentioned journal;
- after publishing the work in the publisher's journal, the author is moreover entitled to use for any purpose whatsoever a part of the work amounting to maximum 250 words and possible pictures and tables belonging to the work, subject to that it has been mentioned that it is a re-print from the above mentioned journal.

Date and author's signature

05/12/2013

Bradji Abdallah

Seal, date and publisher's signature

**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Le Neuvième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a**

**la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

**Aperçu sur le travail**

**Dans ce travail, l'auteur présente une estimation d'erreur pour un schéma d'éléments finis d'ordre un pour une équation d'onde.**

**Remarque : le fichier ci-après est le copyright signé pour avoir la publication**

## Exclusive Licence Agreement

### Preamble

Application of the copyright in the Czech Republic is governed by the Copyright Act No. 121/2000 Coll. A pre-condition for the publisher to initiate the most widest publication process possible of a presented work is obtaining the licence to utilize the work. All the personal and property copyrights, as well as their exercising, belong in accordance with the above Act to the author.

In the event the work has originated as an employee's work all the copyrights are exercised by the employer. The party proposing/drafting this contract (publisher) assumes that the author exercises all the copyrights related to the work and that the below mentioned work - article is the result of a unique creative author's performance, that the work has not been published as yet, that no other person may claim any rights and titles to the work, that the work has not been encumbered with any rights of third parties, that the work is not an employee's work or a work made to order. If the situation is to the contrary, it is necessary that the author refers to the publisher (journal editor). Unless the author has done so, he/she confirms by his/her signature that the above publisher's assumption is true and if it is not so, the author is responsible to the publisher for the consequences resulting therefrom, namely, damages and other loss.

In accordance with the Czech law:

**The publisher of Mathematica Bohemica,  
Matematický ústav Akademie věd České republiky  
(Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic)  
with its registered office at Žitná 25, 115 67 Praha 1,  
Incorporation No.: 67985840, represented by the executive editor Zdeňka Crkalová**

and the author

**BRADII Abdallah**

have entered into the following Exclusive Licence Agreement on Utilization of the Copyright related to the article

**Some new error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations using the Newmark method**

If there are co-authors of the article, the author represents and warrants that he/she is entitled to represent them as an indirect proxy (to negotiate on his/her own behalf and on their account). The co-authors are as follows:

The author grants the publisher the exclusive unrestricted global licence (with an exception referred to hereinafter) to use the work - article, including also the title to publish the work, as a whole or in part, repeatedly or individually, independently or jointly (in a combination or within an assembly) with other works, in print or in an electronic way. The publisher obtains also the right to grant a sublicense, as well as the right to assign the licence.

The licence is granted only as the catfiling one. The publisher is entitled to withdraw from this Agreement in the event the publisher has decided not to utilize the licence for any reason whatsoever. If the publisher fails to exercise the title (to commence the utilization), whether as a whole or in part, within forty eight (48) months, at the latest, it shall be understood that the publisher will have withdrawn from the agreement one (1) day following the above period. If the publisher has withdrawn from the Agreement the author may use the work himself/herself or grant the licence to somebody else.

The author grants the licence to the publisher free of charge.

The publisher reserves the right to make indispensable adjustments of the work in the interest of unification of the style and of a correct language (grammar) of the contributions, and the author is agreeable therewith.

The agreement is entered for the entire period of duration of the property rights to the work.

The parties agree on the following exceptions from the licensed exclusivity:

- the author is entitled to provide pre-prints and copies of the work and to extend them for the purpose of learning, internal need of his/her employer, and his/her personal utilization;
- the author is entitled to use, or agree with another use of, the work (licence) after the publication of the work in the publisher's journal for the purpose of publication of the author's monograph, in a technical report, collection/proceedings, subject to that with such utilization of the work it has been mentioned that it is a re-print from the above mentioned journal;
- after publishing the work in the publisher's journal, the author is moreover entitled to use for any purpose whatsoever a part of the work amounting to maximum 250 words and possible pictures and tables belonging to the work, subject to that it has been mentioned that it is a re-print from the above mentioned journal.

Date and author's signature

Seal, date and publisher's signature

11/11/2013  
*Bradii Abdallah*  
.....  
*if*

.....



**DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**  
**DANS LE CADRE DE**  
**DE PROJET (Suite)**

**Le Dixième travail : Analyse Numérique pour modèle lié a  
la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Prof. Holzbecker, Ekkehard**

Apparaîtra dans OIL GAS European Magazine : <http://www.oilgaspublisher.de/en/periodicals/og.html>

**Aperçu sur le travail**

**Dans ce travail, l'auteur présente une simulation sur réservoir géothermique**

## Rock Deformation due to Geothermal Heat Production – a Modelling Study

Ekkehard Holzbecher, Phillip Oberdorfer

Georg-August Universität Göttingen, Goldschmidtstr. 3, 37077 Göttingen, GERMANY  
E-mail: [eholzbe@gwdg.de](mailto:eholzbe@gwdg.de)

### Introduction

There are several technical interventions that potentially lead to rock displacements and deformations within a geothermal reservoir. First the drilling process itself introduces disturbances in the direct vicinity of a borehole, due to material withdrawal and an altered stress regime. In the post-drilling phase the structure of the rock matrix may be altered intentionally by stimulation methods. Finally, in the production phase the reservoir reacts to the long-term altered pressure and temperature regimes, induced by the production scheme.

In this contribution we focus on phenomena within the production phase. The deformations result from the interaction between thermal, hydraulic and mechanical processes (Ghassemi 2012, Ganguly & Kumar 2012). High pressure and temperature gradients are induced due to the production scheme. The gradients are to be kept over periods of decades, as usually envisaged for production facilities. In order to understand the complex effects of such changes in the sub-surface state, a model has to be set up in which thermal, hydraulic and mechanical and processes are coupled (THM). The hydraulic sub-model is based on Darcy's Law, the mechanical submodel on Biot's concept of poroelasticity, and the thermal regime on Fourier's Law of heat conduction and on convection.

We restrict our study to one special installation within a single borehole. An overview on different concepts for geothermal production is given by Breede *et al.* (2013). Production and injection are performed at different borehole depths. The depths are selected in a way that there is a good hydraulic connection to a relative permeable subsurface structure.

### Model Set-up

The geological model was set up as the so-called 'Horstberg benchmark' (see Figure 1), developed in a joint work by several groups within the gebo-project (2013). This application concerns geothermal production in a fault zone, envisaged as potentially promising setting for deep geothermal production (Pratt *et al.* 1983). Using the single borehole concept hot water is injected in the lower part into a deep aquifer (Detfurth), while the pumping is done above where the borehole meets the permeable fault. In Figure 1 permeable layers and the sloping fault zone are indicated in dark blue color.

## **DESCRIPTION DE QUELQUES TRAVAUX REALISES**

**DANS LE CADRE DE**

**DE PROJET (Suite)**

**Un exemple d'un Code réalisé pour un modèle lié a**

**la Dynamique de Gaz**

**Travail réalisé par Dr. Bradji, Abdallah**

### **Aperçu sur le travail**

Dans le cadre de projet, l'auteur a réalisé quelques codes pour l'approximation de quelques modèles liés au Dynamique de Gaz. Le code suivant (voir la page suivante) présente une méthode de volume pour l'équation d'onde.

////////// Some parts of this program have been taken from a Eymard's poly. Page 45. The aim of this programme is to provide a finite volume for the wave equation. The solution is  $u(x,y,t)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi \sqrt{2}t)$  on  $(0,1)^2 \times (0,1)$ . So, equation is  $\Delta u=0$ . The boundary conditions are Dirichlet and homogeneous. Initial conditions are  $u(x,y,0)=u^0(x,y)$  where  $u^0(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$  and  $u_t(x,y,0)=u^1(x,y)$  where  $u^1(x,y)=0$ . The meshes are rectangles as in the Handbook of Eymard et al. We will show that the order the gradient approximation in  $L^2$  is  $h$  uniformly with respect to  $n$  where  $h=k$

```

clear
N=90;
NN=N*N;
h=1./N;
k=h;
pi=4*atan(1);
DD=zeros(NN,1);
DXP=zeros(NN,1);
DXM=zeros(NN,1);
DYP=zeros(NN,1);
DYM=zeros(NN,1);
for i=1:N-1
for j=1:N
l=i+N*(j-1);
J=l+1;
DD(l)=DD(l)+1;
DXP(l)=-1;
DD(j)=DD(j)+1;
DXM(j)=-1;
end
end
for i=1:N
for j=1:N-1
l=i+N*(j-1);
J=l+N;
DD(l)=DD(l)+1;
DYP(l)=-1;
DD(j)=DD(j)+1;
DYM(j)=-1;
end
end
for i=1:N
l=i;
DD(l)=DD(l)+2;
l=i+N*(N-1);
DD(l)=DD(l)+2;
end
for j=1:N
l=1+N*(j-1);
DD(l)=DD(l)+2;
l=N+N*(j-1);
DD(l)=DD(l)+2;
end
A=sparse([1:NN;1:NN]',DD,[NN NN]); // A is the matrix approximating  $\Delta$ 
A=A+sparse([1:NN-1;2:NN]',DXP([1:NN-1],[NN NN]));
A=A+sparse([1:NN-N;N+1:NN]',DYP([1:NN-N],[NN NN]));
A=A+sparse([2:NN;1:NN-1]',DXM([2:NN],[NN NN]));
A=A+sparse([N+1:NN;1:NN-N]',DYM([N+1:NN],[NN NN]));
C=A+eye(NN,NN); // C is the approximation of  $\frac{m(K)}{k^2}I+A$ 
for i=1:N
for j=1:N
l=i+(j-1)*N;
B(l)=2*(cos(pi*(i-1)*h)-cos(pi*i*h))*(cos(pi*(j-1)*h)-cos(pi*j*h));
end
end
udeb1=A\B; // udeb1 represents the approximation of  $u(0)=u^0$  is then  $U^0$ 
udeb2=udeb1; //  $U^1$ 
for n=1:(1/k)-1 //  $n=1$  to compute  $u_{fin}=U^2$  and  $n=(1/k)-1$  to compute  $u_{fin}=U^M$ , with  $M=1/k$ 
for i=1:N
for j=1:N
l=i+(j-1)*N;
derx(l)=pi*cos(pi*(i-.5)*h)*sin(pi*(j-.5)*h)*cos(pi*sqrt(2)*(n+1)*k); // derivative w.r.t.  $x$ 

```

```

dery(l)=pi*sin(pi*(i-.5)*h)*cos(pi*(j-.5)*h)*cos(pi*sqrt(2)*(n+1)*k); //derivative w.r.t. $y$
end
end
ufin=C\{2*udeb2-udeb1};
for j=1:N-2 // computing discrete gradient
for i=2:N-1
l=j*N+i;
appderx(l)=(ufin(l+1)-ufin(l-1))/(2*h); // discrete derivative w.r.t. $x$
appdery(l)=(ufin(l+N)-ufin(l-N))/(2*h); // discrete derivative w.r.t. $y$
end
l=j*N+1;
appderx(l)=(ufin(l+1)+ufin(l))/(2*h);
appdery(l)=(ufin(l+N)-ufin(l-N))/(2*h);
l=j*N+N;
appderx(l)=(-ufin(l-1)-ufin(l))/(2*h);
appdery(l)=(ufin(l+N)-ufin(l-N))/(2*h);
end
for i=2:N-1
appderx(i)=(ufin(i+1)-ufin(i-1))/(2*h);
appdery(i)=(ufin(i+N)+ufin(i))/(2*h);
l=N*(N-1)+i;
appderx(l)=(ufin(l+1)-ufin(l-1))/(2*h);
appdery(l)=(-ufin(l-N)-ufin(l))/(2*h);
end
appderx(1)=(ufin(2)+ufin(1))/(2*h);
appdery(1)=(ufin(1+N)+ufin(1))/(2*h);
appderx(N)=(-ufin(N-1)-ufin(N))/(2*h);
appdery(N)=(ufin(2*N)+ufin(N))/(2*h);
appderx(N^2-N+1)=(ufin(N^2-N+2)+ufin(N^2-N+1))/(2*h);
appdery(N^2-N+1)=(-ufin(N^2-2*N+1)-ufin(N^2-N+1))/(2*h);
appderx(N^2)=(-ufin(N^2-1)-ufin(N^2))/(2*h);
appdery(N^2)=(-ufin(N^2-N)-ufin(N^2))/(2*h);
E(n)=h*sqrt((appderx-derx)*(appderx-derx))+h*sqrt((appdery-dery)*(appdery-dery));
udeb1=udeb2;
udeb2=ufin;
end
ERROR=max(E)

```

## CONCLUSIONS

Nous avons considéré quelques modèles en Dynamique de Gaz Nous avons fourni l'analyse mathématique et numérique de quelques modèles liés a la Dynamique de Gaz. L'analyse mathématique contient une analyse pour deux phénomènes, a savoir l'oscillation et l'explosion.

Pour le coté numérique, nous avons utilisé les méthodes de volumes et éléments comme des outils pour l'approximation.

Les résultats obtenu sont encourageantes, plus de 10 publications.

Le sujet de Dynamique de Gaz est un sujet intéressant de point de vue pratique et mathématique.

Il est intéressant de chercher des contacts avec les industriels pour faire des collaborations utiles et concrètes.

On compte s'il aura un prolongement de notre projet a :

- 1. Etudier des modèles plus compliqués et plus généraux en Dynamique de Gaz**
- 2. Faire des collaborations avec des industriels, par exemple Sonatrach**

## INFORMATION FINANCIERE : Dépenses

**Remarque :** Je vais inclure dans le tableau suivant seulement les dépenses réelles (comme matériels reçus) . En plus de tableau suivant, je note qu'un bon de commande de 100 000DA d' Accessoires Informatique Signé par les services de Finance de notre Université mais nous n'avons pas reçu le matériel de ce bon de commande. Deux bons de commande (l'un pour Ouvrages de 150 000 DA et autre pour Micros Ordi. De 220 000) ont été pas encore signé par Services Finance

<b>Chapitres</b>	<b>Intitulés</b>	<b>Dépenses (1<sup>ère</sup> année)</b>
<b>01 Remboursement de frais</b>		
1	Frais de mission et de déplacement en Algérie, à l'étranger.	
2	Rencontres Scientifiques : Frais d'organisation, d'hébergement, de restauration et de transport.	
3	Honoraires des enquêteurs.	
4	Honoraires des guides.	
5	Honoraires des experts et consultants.	
6	Frais d'études, de travaux et de prestations réalisés pour le compte de l'entité.	
<b>SOUS TOTAL</b>		
<b>02 Matériels et mobiliers</b>		
1	Matériels et instruments scientifiques et audiovisuels.	523 019, 25 DA
2	Renouvellement du matériel informatique, achat accessoires, logiciels et consommables informatiques.	81 081, 00 DA
3	Mobilier de laboratoire.	
4	Entretiens et réparations.	
<b>SOUS TOTAL</b>		<b>604 100, 25 DA</b>
<b>03 Fournitures</b>		
1	Produits chimiques.	
2	Produits consommables.	
3	Composants électroniques, mécaniques et audio-visuels.	
4	Papeterie et fournitures de bureau.	
5	Périodiques.	
6	Documentation et ouvrages de recherche.	348 916, 30 DA
7	Fournitures des besoins de laboratoires (animaux, plantes etc.)	
<b>SOUS TOTAL</b>		<b>348 916, 30 DA</b>
<b>04 Charges Annexes</b>		
1	Impression et édition.	
2	Affranchissements postaux.	
3	Communications téléphoniques, Fax, télex, télégramme, Internet.	
4	Autre frais (impôts et taxes, droits de douane, frais financiers, assurances, frais de stockage, et autre).	
5	Banque de données (acquisitions et abonnements).	
<b>SOUS TOTAL</b>		
<b>TOTAL GENERAL</b>		<b>953 016, 55 DA</b>

## REFERENCES

1. B. Atfeh: Méthodes Des Lignes de Courant Applique La Modlisation Des Bassins. Editions Universitaires Europeennes 2010.
2. A. Berkane : On the oscillation of the solutions of some coupled hyperbolic problems with delays. Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 108, 5363-5384
3. A. Bradji : An analysis of a second order time accurate scheme for a finite volume method for parabolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes . Applied Mathematics and Computation, 219/11, 6354--6371, 2013
4. A. Bradji : Convergence analysis of some high--order time accurate schemes for a finite volume method for second order hyperbolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes Numerical Methods for Partial Differential Equations, 29/4, 1278--1321, 2013
5. A. Bradji : A theoretical analysis of a new finite volume scheme for second order hyperbolic equations on general nonconforming multidimensional spatial meshes. Numerical Methods for Partial Differential Equations , 29/1, 1--39, 2013
6. A. Bradji et J. Fuhrmann : Some abstract error estimates of a finite volume scheme for a nonstationary heat equation on general nonconforming multidimensional spatial meshes. Applications of Mathematics, Praha, 58/1, 1--38, 2013
7. A. Bradji et J. Fuhrmann : A new error estimate for a Crank--Nicolson finite element scheme for parabolic equations. Apparaîtera [Mathematica Bohemica](#)
8. A. Bradji et J. Fuhrmann : Some new error estimates for finite element methods for the acoustic wave equation using the Newmark method. Apparaîtera dans [Mathematica Bohemica](#)
9. B. Després et F. Dubois: Systèmes Hyperboliques de Lois de Conservation, Application à la Dynamique de Gaz. Les Editions de L'Ecole Polytechnique. 2005
10. M. Feistauer, J. Felcman and I. Straskraba: Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow. Oxford Science Publications, 2004.
11. R. Eymard, T. Gallouet and R. Herbin: Finite Volume Methods. Handbook of Numerical Analysis. P. G. Ciarlet and J. L. Lions (eds.), VII , 7231020, 2000.
12. R. Eymard, T. Gallouet and R. Herbin: Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI: a scheme using stabilization and hybrid interfaces. IMA J Numer Anal, 2010, 30(4): 1009-1043
13. F. Fezoui. Resolution des equations d'Euler par un schema de Van Leer en elements finis, Rapport INRIA no 358, 1985. 6. P.L. Lions. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Oxford Science Publications, 1996.
14. E. Godlewski, P.A. Raviart: Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Applied Mathematical Sciences, vol: 118, Springer, New York, 1996.
15. E. Holecbecker : Rock Deformation due to Geothermal Heat Production-- a Modelling Study. Apparaîtra dans OIL GAS European Magazine.
15. E. Holecbecker : A Novel Modeling Approach Using Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Method for the Flow Simulation in Unconfined Aquifers. Computers and Geosciences, Vol. 62, Pages 88--94
16. P. L. Lions: Mathematical Topics in Fluid Mechanics., Oxford Science Publications, 1996
17. M. Chahrazed : Blow-up of solution in a nonlinearly damped plate system



18. M. Chahrazed : A Blow up result in the Cauchy Problem for a semi-linear accretive wave equation  
GJSFR, Vol. 11 Issue 4, 1--9. 2011