UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2002-2003

Algèbre et Géométrie - TD n^0 3

Ex. 1. (Cauchy-Schwarz) Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que

$$|\langle x, y\rangle_h| \leq \|x\|_h \|y\|_h \ \forall \ x, y \in E.$$

Ex. 2. (orthogonal, biorthogonal) Soit h une forme sesquilinaire hermitienne (resp. bilinaire symtrique) sur l'espace complexe (resp. réel) de dimension finie E, et soit $N(h)$ le noyau de h. Démontrer que pour tout sous-espace $F \subset E$ on a

1. $\dim(E) - \dim(F^{\perp_h}) = \dim(F) - \dim(F \cap N(h))$.
2. $(F^{\perp_h})^{\perp_h} = F + N(h)$

Ex. 3. (le produit scalaire L^2). Démontrer que la formule

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

définit un produit scalaire hermitien sur l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur l'intervalle $[a, b]$. Est-ce que l'espace prehilbertien $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ est un espace hilbertien ? Justifier votre réponse.

Ex. 4. (classification des espaces euclidiens et hermitiens)
Soient (E, f) et (E', f') deux espaces euclidiens (resp. hermitiens) de même dimension. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $u : E \to E'$ tel que

$$\langle u(x), u(y)\rangle_{f'} = \langle x, y\rangle_f \ \forall x, \ y \in E.$$

Ex. 5. Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que $f := \mathrm{Re}(h)$ est un produit scalaire sur E, tandis que $\omega := \mathrm{Im}(h)$ est une forme antisymétrique non-dégénérée sur E.

Ex. 6.

1. Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que l'application $M_n(K) \times M_n(K) \to K$ donnée par $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Montrer que, sur $\mathfrak{sl}(2, K)$, la forme quadratique associée à la forme $(A, B) \to \mathrm{tr}(AB)$ est donnée par $A \mapsto -2\det(A)$.
2. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\bar{A}\ B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA\ B)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Ex. 7. (groupes classiques compacts) Démontrer que les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$, considérés comme sous-espaces topologiques de l'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), sont compacts. Les groupes $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

Ex. 8. (algèbres de Lie des groupes $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$).
Désignons par

$$\mathfrak{so}(n) := \{a \in M_n(\mathbb{R}) |\ {}^ta = -a\}$$

$$(\text{resp. } \mathfrak{u}(n) := \{a \in M_n(\mathbb{C}) |\ {}^t\bar{a} = -a\}, \text{ resp. } \mathfrak{su}(n) := \{a \in \mathfrak{u}(n) |\ \mathrm{tr}(a) = 0\})$$

le sous-espace des matrices antisymétriques (resp. antihermitiennes, resp. antihermitiennes à trace nulle).

1. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M_n(\mathbb{R})$ (resp. $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M_n(\mathbb{C})$) un chemin différentiable tel que
   (a) $\gamma(0) = I_n$
   (b) $\mathrm{im}(\gamma) \subset SO(n)$ (resp. $\mathrm{im}(\gamma) \subset U(n)$, resp. $\mathrm{im}(\gamma) \subset SU(n)$).

   Démontrer que $\dot\gamma(0) \in \mathfrak{so}(n)$ (resp. $\dot\gamma(0) \in \mathfrak{u}(n)$, $\dot\gamma(0) \in \mathfrak{su}(n)$).
2. Démontrer que pour tout $a \in \mathfrak{so}(n)$ (resp. $a \in \mathfrak{u}(n)$, resp. $a \in \mathfrak{su}(n)$) le chemin différentiable $t \mapsto \exp(ta)$ satisfait aux propriétés (a) et (b).
3. En déduire que

$$\mathfrak{so}(n) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SO(n)\},$$
$$\mathfrak{u}(n) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset U(n)\}$$
$$\text{et } \mathfrak{su}(n) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SU(n)\}.$$

   Quelle est l'interpretation géométrique des ces égalités ?
4. Une K-*algèbre de Lie* est un K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinaire antisymétrique $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to K$ qui satisfait à l'*identité de Jacobi*

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0.$$

   Montrer que, pour toute K-algèbre associative A, le *crochet de Lie* $(a,b) \mapsto [a,b] := ab - ba$ définit une structure de K-algèbre de Lie sur A. En particulier, pour $M_n(K)$, celle-ci est désignée par $\mathfrak{gl}(n,K)$. Montrer
   (a) que $\mathfrak{sl}(n,K) := \{a \in \mathfrak{gl}(n,K) |\ \mathrm{tr}(a) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,K)$, c. à d. que $\mathfrak{sl}(n,K)$ est stable pour le crochet de Lie et
   (b) que $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$ sont des sous-algèbres de Lie *réelles* de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$).
5. Montrer que l'image de $\mathfrak{so}(n)$ (resp. $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$) par l' exponentielle coïncide avec $SO(n)$ (resp. $U(n)$, resp. $SU(n)$).

Ex. 8.

1. Soit $a \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\det(\exp(a)) = e^{\mathrm{tr}(a)}$.
   Indication : Vérifier d'abord cette identité pour les matrices diagonalisables et remarquer que l'ensemble des endomorphismes diagonalisable est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
2. En utilisant la même méthode que dans l'exercice 7.3, montrer que

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SL(n,\mathbb{R})\}$$

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SL(n,\mathbb{C})\}$$