Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

1 Rappel

On rappelle ici ce qui a été démontré lors du cours précédent.

Lemme 1 *Soit $u \in End(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $\iota = \iota(u)$.*
Soit $v \in E$ un vecteur tel que $u^{\iota-1}(v) \neq 0$. Alors le système $(v, u(v), ...u^{\iota-1}(v))$ est libre.

Corollaire 1 *On a donc toujours $\iota(u) \leq \dim(E)$ et donc $u^{\dim(E)} = 0$ pour tout endomorphisme nilpotent u de E.*

Nous avons traité le cas particulier important où l'indice de nilpotence et la dimension de E coïncident : $\iota(u) = \dim(E)$.
Dans ce cas on peut trouver une base de la forme $(u^{n-1}(v), \dots, u(v), v)$ (où $n := \dim(E)$).
On trouve que la matrice de u dans un telle base et très simple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice s'appelle **bloc de Jordan de taille n et de valeur propre 0**.

2 Forme de Jordan des endomorphismes nilpotents

Notre but maintenant est de trouver une forme canonique pour un endomorphisme nilpotent arbitraire (c'est-à-dire dans le cas général $\iota(u) \leq n$).

Théorème 2 *Soit u un endomorphisme nilpotent. Alors $Spec_K(u) = \{0\}$.*

Démonstration : 1. Soit $v \in E$ tel que $u^{\iota-1}(v) \neq 0$. Alors $u^{\iota-1}(v)$ sera un vecteur propre de valeur propre 0. Donc $0 \in \mathrm{Spec}_K(u)$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}_K(u)$. Alors il existe $v \neq 0$ tel que $u(v) = \lambda v$. On obtient $0 = \lambda^{\iota-1} v$ donc $\lambda = 0$. □

Le but de ce cours est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3 *Soit $u \in End(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $\iota := \iota(u)$ et soit $k := \dim(\ker(u) = mult_g(0)$.*
Alors E admet une base dans laquelle u est donné par une matrice formée par k blocs de Jordan. La taille maximale de ces blocs de Jordan est ι.

La fin de ce cours est consacrée à la preuve de ce théorème.

Lemme 2 *Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence ι. Posons $K_i := \ker(u^i)$ pour $1 \leq i \leq \iota$. Alors $E_0 = K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq \cdots \subsetneq K_\iota = E$, toutes les inclusions sont strictes.*

Démonstration : En effet supposons $K_j = K_{j+1}$ pour $j < \iota$. Alors si $u \in K_{j+2}$, on obtient $u^{j+2}(v) = 0$, donc on a $u(v) \in K_{j+1}$,donc $u(v) \in K_j$, donc $u^{j+1}(v) = 0$. Par récurrence on obtient $K_j = K_{j+1} = \cdots = K_\iota = E$, donc l'indice de nilpotence serait $\leq j$, ce qui est une contradiction. □

Lemme 3 *Soit $u \in End(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence ι et soit $K_i := \ker(u^i)$ pour $1 \leq i \leq \iota$. Il existe des sous-espaces vectoriels $F_j \subseteq K_j$, où $F_\iota \neq \{0\}$, tels que les noyaux K_j se décomposent en somme directe comme suit :*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
K_\iota & = & K_{\iota-1} & \oplus & F_\iota & & & & & & & & & & \\
K_{\iota-1} & = & K_{\iota-2} & \oplus & u(F_\iota) & \oplus & F_{\iota-1} & & & & & & & & \\
K_{\iota-2} & = & K_{\iota-3} & \oplus & u^2(F_\iota) & \oplus & u(F_{\iota-1}) & \oplus & F_{\iota-2} & & & & & & \\
\dots & & & & & & & & & & & & & & \\
K_1 & = & & & u^{\iota-1}(F_\iota) & \oplus & u^{\iota-2}(F_{\iota-1}) & \oplus & u^{\iota-3}(F_{\iota-2}) & \oplus & \cdots & \oplus & u(F_2) & \oplus & F_1
\end{array}$$

Démonstration : Par récurrence décroissante :
initialisation : on choisit un supplémentaire F_ι de $K_{\iota-1}$ dans K_ι. Il sera non-nul, d'après le lemme 2.
passage de $\iota - j + 1$ à $\iota - j$: On suppose qu'on a trouvé les sous-espaces $F_\iota, \dots, F_{\iota-j+1}$ tels que les premieres j décompositions en somme directe soient vérifiées. C'est à dire en particulier que

$$K_{\iota-j+1} = K_{\iota-j} \oplus u^{j-1}(F_\iota) \oplus \cdots \oplus u(F_{\iota-j+2}) \oplus F_{\iota-j+1}$$

On veut maintenant montrer que $K_{\iota-j}$ se décompose en somme directe. Il suffit de démontrer que les sous-espaces $K_{\iota-j-1}$ et $u^s(F_{\iota+s-j})$ $1 \leq s \leq j$ sont en somme directe. Considerons donc une somme nulle de la forme

$$k_{\iota-j-1} + \sum_{s=1}^{j} u^s(f_{\iota+s-j}) = 0$$

où chaque vecteur se trouve dans le sous-espace indiqué par l'indice.

On applique $u^{\iota-j-1}$ et on écrit le résultat sous la forme

$$u^{\iota-j}\left(\sum_{t=0}^{j-1} u^t(f_{\iota+t+1-j})\right) = 0 \quad (t := s-1).$$

Donc

$$\sum_{t=0}^{j-1} u^t(f_{\iota+t+1-j}) \in K_{\iota-j}.$$

Mais, les sous-espaces $K_{\iota-j}$ et $u^t(F_{\iota+t+1-j})$ pour $t = 0, \dots, j-1$ sont en somme directe de somme $K_{\iota-j+1}$, ce qui montre que tous les termes de cette somme sont nuls.

Revenons à la somme initiale, on voit que tous les termes sont nuls. □

Remarque :

1. En général, on peut avoir $F_j = 0$ pour $j < \iota$.
2. $u^s : F_j \to u^s(F_j)$ est un isomorphisme pour $0 \leq s \leq j-1$.

En effet si $u^{j-1}(f_j) = 0$ alors $f_j \in K_{j-1}$, mais K_{j-1} et F_j sont en somme directe donc $f_j = 0$.

En utilisant ces décompositions on peut démontrer notre théorème. La démonstration est aussi un algorithme pour trouver une base dans laquelle la matrice de u est une matrice de Jordan.

On utilise la décomposition

$$E = \oplus_{0 \leq s < j \leq \iota} u^s(F_j)$$

1. On choisi une base $v_1, ...v_k$ de F_ι
On considére les k systèmes

$$u^{\iota-1}(v_1), ...u(v_1), v_1$$
$$u^{\iota-1}(v_2), ...u(v_2), v_2$$
$$u^{\iota-1}(v_k), ...u(v_2), v_k$$

qui consituent k blocs de Jordan de taille ι.

On continue de la même manière avec $F_{\iota-1}$ SI CELUI-CI EST NON NUL !

On obtiendra $\dim(F_j)$ blocs de Jordan de taille j.

Ceci termine la démonstration du théorème. □

Corollaire 4 *Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable et son polynôme caractéristique est*

$$P_u(X) = (-1)^{\dim(E)} X^n$$