UNIVERSITÉ DE PROVENCE — LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2003-2004

Algèbre et Géométrie - EXAMEN du 3 juin 2004

Ex. 1. (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème concernant la diagonalisabilité d'un endomorphisme normal.
2. Montrer que tout endomorphisme u d'un espace hermitien (E, h) qui est à la fois unitaire et hermitien vérifie $u \circ u = \mathrm{id}_E$. Est-ce que la réciproque est vraie ?
3. Justifier le fait que $O(n)$, considéré comme sous-espace topologique de $M_n(\mathbb{R})$, est compact.

Ex. 2.

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien (E, h).

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $s_F : E \to E$, appelé **symétrie orthogonale par rapport à** F, satisfaisant aux conditions
$$x + s_F(x) \in F \ , \ s_F(x) - x \in F^{\perp} \quad \forall x \in E \ .$$
Indication : Utiliser la décomposition en somme directe orthogonale $E = F \oplus F^{\perp}$.
2. Montrer que s_F possède les propriétés suivantes :
   (a) $s_F|_F = \mathrm{id}_F$,
   (b) $s_F \circ s_F = \mathrm{id}_E$.
3. Montrer que s_F est un endomorphisme orthogonal.
4. Montrer que s_F est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$!).
5. Montrer que $s_F \in SO(E)$ si et seulement si la codimension de F est paire.
6. Démontrer que tout endomorphisme orthogonal diagonalisable (sur $\mathbb{R}$!) de E est de la forme s_F, pour un sous-espace $F \subset E$.
7. Soient d, δ deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $s_d \circ s_\delta \in SO(2)$ et déterminer l'angle de cette rotation en fonction de $\angle(d, \delta)$.
Indication : Choisir une base orthonormée convenable de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 3.

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^4$ défini par A.
2. Diagonaliser l'endomorphisme u.
3. Soit λ la valeur propre de u telle que $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$. Trouver une base (e_1, e_2) de $E_\lambda(u)$ et justifier le fait que $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ est une base de $E_{\bar{\lambda}}(u)$.
4. Exprimer l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^4$ défini par A dans la base

$$(\mathrm{Re}(e_1), \mathrm{Im}(e_1), \mathrm{Re}(e_2), \mathrm{Im}(e_2))$$

   de $\mathbb{R}^4$.

Ex. 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dans la suite, on identifiera un vecteur $A \in \mathbb{R}^n$ à la matrice $\in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ correspondante.

1. Soient A et $B \in \mathbb{R}^n$. ${}^tA\ B$ est une matrice $(\alpha) \in \mathbb{M}_1(\mathbb{R})$. Que vaut $\alpha \in \mathbb{R}$ en termes du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$?
2. Exprimer, en fonction de A et B, l'image et le noyau d'un endomorphisme $A\ {}^tB$.

Aux 3-7, $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ désigne une matrice de rang ≤ 1 .

3. Démontrer que l'on a $M = A\ {}^tB$ pour deux vecteurs A et $B \in \mathbb{R}^n$.
   La décomposition $M = A\ {}^tB$ est-elle unique ?
4. Exprimer M^2 comme multiple (à facteur scalaire) de M.
   Indication : Utiliser 1.
5. En déduire le polynôme minimal de M .
   (Ne pas oublier le cas où celui-ci est de degré 1 !)
6. Sous quelles conditions la matrice M est-elle diagonalisable ?
   Supposons alors que M est effectivement diagonalisable.
   (a) Donner une forme normale de M .
   (b) Démontrer que A est un vecteur propre.
7. Donner une forme normale de M lorsque celle-ci n'est pas diagonalisable.
8. On pose $\mathcal{R} := \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \wr \mathrm{rg}(A) \leq 1\}$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), .)$ stable pour la multiplication.