UNIVERSITÉ DE PROVENCE   LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75 - 2004

Algèbre et Géométrie - EXAMEN du 6 septembre 2004

Ex. 1. (Questions de cours)

1. Le théorème de Cayley-Hamilton. Énoncé et démonstration.
2. La forme canonique d'un endomorphisme
   (a) normal d'un espace hermitien,
   (b) hermitien d'un espace hermitien,
   (c) unitaire d'un espace hermitien,
   (d) symétrique d'un espace euclidien.

Ex. 2.
Soit $A \in M_6(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement $P_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2$ et $m_A(X) = (X-1)^2(X-2)$. Déterminer

1. les dimensions possibles des espaces propres,
2. les dimensions possibles des espaces caractéristiques,
3. les formes réduites de Jordan possibles.

Ex. 3.
On considère deux réels a et b et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de a et b

1. le polynôme caractéristique de A et ses sous-espaces propres,
2. ses sous-espaces caractéristiques,
3. son polynôme minimal,
4. une forme réduite de Jordan.

(On ne demande pas de donner les matrices de passage, on pourra simplement discuter la dimension des sous-espaces considérés et la taille des différents blocs de Jordan).

Ex. 4.
Soit

$$SU(n) := \{A \in U(n) |\ \det(A) = 1\}\ ,\ \mathfrak{su}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) |\ A + {}^t\bar{A} = 0\ ,\ \mathrm{Tr}(A) = 0\}\ ,$$

où $U(n)$ désigne le groupe des matrices unitaires d'ordre n. Montrer que

1. $SU(n) = \{\exp(A) |\ A \in \mathfrak{su}(n)\}$.
2. $\{tA |\ t \in \mathbb{R}\ ,\ A \in SU(2)\} = \{\mathbb{R}I_2 + \mathfrak{su}(2)\}$.

Indication : Utiliser les théorèmes de diagonalisation.