Exercice 1. On choisit au hasard une matrice 2×2 parmi les matrices dont les coefficients sont des 1 et des -1. Calculer l'espérance du déterminant et du carré du déterminant de cette matrice.

Exercice 2. Soient $a, b \in]0, 1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $P(X = x) = (1 - a)a^x$ et $P(Y = y) = (1 - b)b^y$ (ce sont des lois de Pascal).

Soit $M = \min(X, Y)$ et $D = X - Y$.

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ calculer $P(X \geq m)$, $P(Y \geq m)$, $P(M \geq m)$ et $P(M = m)$. En déduire que M suit aussi une loi de Pascal dont on donnera le paramètre. Expliquer ce phénomène.

2. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{Z}$ calculer $P(M = m, D = d)$ et en déduire $P(D = d)$.

3. Montrer que les variables M et D sont indépendantes.

Exercice 3. On cloue sur une planche verticale un réseau triangulaire de n lignes de clous. On fait tomber des billes à la vertical du sommet du triangle et on suppose qu'à chaque rebond une bille à une chance sur deux de partir à droite ou à gauche et d'aller ensuite rebondir sur le clou correspondant de la ligne suivante. On dispose $n + 1$ cases sous la dernière rangée de clous pour recueillir les billes.

1. Montrer que l'on peut modéliser cette expérience en prenant n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et en appelant $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la case dans laquelle tombe la bille.

2. Pour $i = 0, \ldots, n$, calculer la probabilité que la bille tombe dans la i-ième case.

3. Soit δ_n la distance horizontale entre deux clous consécutifs (et donc aussi la largeur des cases). On suppose que $\delta_n = \frac{1}{n}$, c'est à dire que la base du triangle est 1 pour tout n. On note $D_n = \delta_n(X_1 + \cdots + X_n) - \frac{1}{2}$ la distance algébrique de la boule au centre de la base du triangle. Calculer

$$P(\frac{\delta_n}{2} \leq D_n < \frac{\delta_n}{2}).$$

Montrer que D_n converge en probabilité vers la variable aléatoire constante nulle (loi des grands nombres).

4. On dispose les clous pour que $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, si bien que la base du triangle est $\sqrt{n}$. On note

$$D_n = \delta_n(X_1 + \cdots + X_n) - \frac{\sqrt{n}}{2}$$

la distance de la boule au centre de la base du triangle. Pour n pair et $k = 0, \ldots, n$ calculer

$$p_n = P(D_n \in [\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}[).$$

En déduire que D_n converge en loi vers une gaussienne (théorème de la limite centrale).