Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1. **1.** **a.** Résoudre $\left\{\begin{array}{ccccccc} 4a & - & 2b & + & c & = & 13 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 9a & + & 3b & + & c & = & -2 \end{array}\right.$.

b. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a,b,c \in \mathbb{R}$). Montrer que la courbe représentative de P passe par les points $A(-2,13)$, $B(1,-2)$ et $C(3,-2)$ si et seulement si a,b,c sont solutions du système de la question précédente.

c. En déduire qu'il existe un unique polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

2. Soient $x_0,x_1,x_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} {x_0}^2 & x_0 & 1 \\ {x_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_0 - x_2)(x_0 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Exercice 2. Pour chacun des systèmes de vecteurs suivant, déterminer lesquels sont linéairement indépendants. Justifier.

1. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $x = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 3-i \end{pmatrix}$

Exercice 3. Les questions sont indépendantes.

1. Trouver des entiers $x,y \in \mathbb{Z}$ tels que $77x - 151y = 5$.

2. Déterminer le reste de la division par 5 de 12^{4420}

3. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

4. Montrer que pour tout entier n, $n^7 - n$ est divisible par 42.

5. En utilisant les identités remarquables, montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est un nombre premier (nombres de MERSENNE). La réciproque est-elle vraie?

Exercice 4. On se propose dans cet exercice de montrer le

Théorème [Darboux] *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, soit $a,b \in I$, $a < b$ et soit c compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f'(\xi) = c$.*

Ceci revient à dire que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires alors qu'on n'a pas supposé que f' est continue.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(a) \leq f'(b)$ et soit $c \in [f'(a),f'(b)]$.

a. Montrer que $\begin{array}{rccl} \phi : & [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \phi(x) = \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} \psi : &]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \psi(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$ sont continues.

b. Montrer que l'on peut prolonger par continuité ϕ et ψ en b et a, respectivement, par des valeurs que l'on précisera.

c. Montrer que si $c \geq \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ alors il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $\phi(\zeta) = c$ et qu'il existe $\xi \in [\zeta,b]$ tel que $f'(\xi) = c$.

d. Montrer de même, en utilisant ψ, que si $c \leq \dfrac{f(b)-f(b)}{b-a}$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $f'(\xi) = c$.

2. Cette question, indépendante de la précédente, illustre les discontinuités possible d'une fonction dérivée.

Soit $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.

c. Montrer que f' n'est pas continue en 0. (On donnera une démonstration rigoureuse)

Problème

Formulaire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \qquad \cot' x = -(1 + \cot^2 x) \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

On considère la fonction f définie sur $[0,\pi[$ par $f(x) = \begin{cases} x \cot x & x \in]0,\pi[\\ 1 & x = 0 \end{cases}$.

1. Continuité et dérivabilité de f

a. Montrer que f est continue en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $]0,\pi[$, et calculer sa dérivée.

c. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi[$.

2. Étude locale de f en 0 et en π

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$.

b. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers π par valeurs inférieures.

c. Donner le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

d. Montrer que la courbe de f est au dessous de la parabole $y = 1 - \frac{x^2}{3}$ au voisinage de O (on montrera précisément qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0,\eta]$, $f(x) \leq 1 - \frac{x^2}{3}$).

3. Courbe représentative de f

a. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\sin x < x$.

b. En déduire que pour tout $x \in]0,\pi[$, $f'(x) < 0$.

c. tracer la courbe représentative de f.

4. Fonction réciproque

a. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera le domaine et l'image.

b. Donner $g(0)$, $g(1)$ et $g'(0)$.

c. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$ et calculer sa dérivée.

d. Montrer que g est équivalente à $\sqrt{3(1-y)}$ quand y tend vers 1 par valeurs inférieures.

e. Donner le développement limité à l'ordre 3 de g en 0 *(indication : on pourra calculer un développement limité d'ordre* 3 *de* f *en* $\frac{\pi}{2}$ *en utilisant que* $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$*, puis que* $\forall y \in]-\infty,1]$, $f(g(y)) = y$*).*