4 heures — Documents et calculatrices interdits

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ munit de la base canonique (e_1, e_2, e_3) et l'application linéaire $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau N de f.

2. Préciser le rang de f.

3. Soit $V = \mathrm{Im} f$ l'image de f.

a. Donner la dimension de V.

b. Donner une base de V.

c. Donner une équation de V.

4. Calculer A^2.

5. péciser la nature géométrique de f.

6. Donner la matrice de f dans la base $\left(u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2. On considère dans l'espace affine euclidien de dimension 3 les points

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1. Faire un dessin.

2. Caculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3. On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \cos u_n - \dfrac{1}{2} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Démontrer soigneusement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4. Soit $0 < b_0 < a_0$ deux nombres réels. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $\dfrac{1}{b_{n+1}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n})$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < b_n < a_n$.

2. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} < \dfrac{1}{2}$.

4. Déduire des questions précédentes que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite l.

5. calculer $a_n b_n$ en fonction de $a_0 b_0$ et en déduire la valeur de l.

Exercice 5. Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

1. Rappeler la définition de « f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 ».

2. Démontrer soigneusement que f est continue et dérivable en 0.

3. On considère les fonctions $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x} & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

a. Montrer que f et g admettent un développement limité d'ordre 2 en 0.

b. Montrer que f est 2 fois dérivable en 0 mais que g ne l'est pas.

Exercice 6. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ définie sur $]-1; +\infty[$.

1. **a.** Déterminer les limites de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$.

2. **a.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en $x = 0$.

b. Donner le développement limité d'ordre 3 de f en 0.

c. Montrer soigneusement que la courbe de f est au dessus de la parabole $y = -x^2 + x$ au voisinage de $x = 0$.

3. Tracer la courbe représentative de f.

4. **a.** Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $]-\infty; \frac{2}{e}]$ telle que pour tout $x \in]-1; e^2-1]$, $g(f(x)) = x$.

b. Donner $g(0)$, $g'(0)$ et $g(\frac{2}{e})$.

c. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty; \frac{2}{e}[$.

d. Donner le développement limité d'ordre 3 de g en 0.

e. Montrer que $g(y) - (e^2 - 1)$ est équivalent à $-2e^{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{2}{e} - y}$ quand y tend vers $\frac{2}{e}$ par valeurs inférieures.