Problème : nombres et points constructibles à la règle et au compas (la quadrature du cercle)

Avec une règle et un compas, on peut tracer (ou définir) des droites et des cercles. Pour tracer une droite on a besoin de connaître deux de ses points, pour tracer un cercle on a besoin de connaître son centre et un de ses points. Lorsqu'ils existent les points d'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles déjà tracés, sont de nouveaux points construits. On a parfois besoin de « choisir une droite, un point, un rayon au hasard », il faut alors montrer que les points, droites ou cercles obtenus ne dépendent pas de ce choix initial.

On aura tout intérêt à se servir de Cabri-géomètre pour vérifier ses constructions.

Le début de la Géométrie de DESCARTES *répond à ce problème qui a occupé les mathématiciens jusqu'à la fin du XIXe siècle.*

1. Rappeler les constructions à la règle et au compas de la médiatrice et du milieu d'un segment donné.

2. Rappeler les constructions à la règle et au compas de la perpendiculaire et de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Dans les deux questions ci-dessus, on démontrera que les droites (ou le point) obtenu sont biens celles recherchées.

On se donne deux points A et B tels que $AB = 1$. « Construire le nombre x » signifie construire deux points M et N tels que $MN = |x|$.

3. Construire 2, 3, etc. Construire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. Un nombre x étant construit, construire $\frac{p}{q}x$ où p et q sont deux nombres entiers strictement positif.

4. Deux nombres x et y étant construit, construire $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{x}{y}$ et $\sqrt{x}$.

5. Montrer que le problème de la quadrature du cercle (construire un carré de même aire qu'un disque donné), est équivalent à construire π.

6. Montrer que l'ensemble des nombres constructibles (à la règle et au compas) est un sous corps de $\mathbb{R}$ clos par racines carrés.

Soit k le corps des nombres constructibles et $\mathcal{C}$ l'ensemble des poins du plan constructibles.

7. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan constructibles est l'ensemble des points M dont les coordonnées dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont toutes deux dans k le corps des nombres constructibles.

8. Soit C, D, E, F quatre points constructibles, exprimer les coordonnées de l'intersection de (CD) et (EF) quand ces deux droites sont sécantes en fonctions de celles de C, D, E, F.

9. Soit C, D, E, F quatre points constructibles, exprimer les coordonnées des intersections de (CD) et du cercle de centre E passant par F quand elles existent en fonctions de celles de C, D, E, F.

10. Soit C, D, E, F quatre points constructibles, exprimer les coordonnées des intersections du cercle de centre C passant par D et du cercle de centre E passant par F quand elles existent en fonctions de celles de C, D, E, F.

11. Montrer que k est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et clos par racines carrés.

12. Montrer que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. En déduire une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.

On pourrait montrer que le polygone régulier à 17 côtés est lui aussi constructible, mais cela est fastidieux. Le polygone régulier à 7 côtés n'est lui pas constructible car $\cos \frac{2\pi}{7}$ *nécessite une racine cubique.* Lindemann *a démontré en 1882 (c'est un bon exercice de fin de licence) que π est transcendant c'est à dire qu'il n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers et en particulier qu'il ne peut s'exprimer uniquement avec des racines carrées : la quadrature du cercle est impossible. Finalement, un nombre est constructible à la règle et au compas si et seulement si il est algébrique et son groupe de* Galois *est d'ordre une puissance de* 2.

Exercice facultatif (Problème de Napoléon) Trouver le centre d'un cercle donné en utilisant uniquement le compas. (On pourrait montrer qu'avec le seul compas, on peut construire tous les points constructibles à la règle et au compas.)