On trouvera ici les notions sur les ensembles rencontrées et nécessaires dans le cours de «géométrie du plan et de l'espace» de première année de licence de mathématiques et informatique.

1. La théorie des ensembles construit toutes les mathématiques à partir des ensembles et de la relation $\in$.

2. On écrit $A \subseteq B$ comme abréviation de « tout élément de A est élément de B » ou encore « $\forall x,\ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ ».

L'axiome d'extensionnalité affirme que $A = B$ si et seulement si A et B ont les mêmes éléments, c'est-à-dire que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ ou encore $\forall x,\ ((x \in A) \iff (x \in B))$.

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles il faut montrer deux inclusions.

3. $\emptyset$ est l'**ensemble vide**.

4. $A \cap B$ est l'**intersection** de A et B : $\forall x((x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B))$.

5. $A \cup B$ est l'**union** de A et B : $\forall x((x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B))$.

6. La définition exacte du **couple** (x, y) n'est pas très intéressante ($(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ par exemple). La propriété essentielle est que $((x, y) = (x', y')) \iff ((x = x') \text{ et } (y = y'))$. En général $(x, y) \neq (y, x)$.

7. Le **produit cartésien** $A \times B$ de A et B est l'ensemble des couples d'éléments de A et B.

On écrit A^2 pour $A \times A$ et A^n pour $A \times A \times \cdots \times A$ (n facteurs). (Le produit cartésien est associatif : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.)

8. Une **relation** R entre A et B est une partie de $A \times B$. On écrit xRy pour $(x, y) \in R$.

9. Une **relation d'équivalence** R sur A est une partie de $A \times A$ qui est

1. réfléxive $\forall x \in A,\ xRx$;
2. symétrique $\forall x, y \in A,\ xRy \iff yRx$;
3. transitive $\forall x, y, z \in A,\ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$.

La **classe d'équivalence** d'un élément x de A est $\{y \in A \mid xRy\}$ c'est une partie de A.

Le **quotient** A/R de A par R est l'ensemble des classes d'équivalences.

10. Une **application** de A vers B est une relation f entre A et B telle que $\forall x \in A\ \exists! y \in B\ y = f(x)$. On écrit $y = f(x)$ au lieu de xfy ou encore $(x, y) \in f$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y. A est l'**ensemble de départ** et B l'**ensemble d'arrivée**. Tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée.

11. Une application de A vers B est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ : $\forall x, x' \in A,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

12. Une application de A vers B est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ : $\forall y \in B,\ \exists x \in A,\ f(x) = y$.

13. Une application de A vers B est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective : $\forall y \in B,\ \exists! x \in A,\ f(x) = y$.

14. Une **fonction** de A vers B est une application d'une partie de A (son **domaine de définition**) vers B. Cette nuance entre fonction et application n'est pas bien établie.

15. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ est l'anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star\}$ est le corps des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels comme $\sqrt{3}$, π, $-e^{\sqrt{7}}$, $\frac{-99}{\ln 2}$, etc.

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ est le corps des nombres complexes.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$