Durée : 1h30. Calculatrices, documents et téléphones interdits.
Barème : exercice 1 : 5 points, exercice 2 : 7 points, problème : 8 points.

Exercice 1. **(Cours)** Soient a, b, c, a', b', c' six réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On considère dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations :

$$\mathcal{D} \ : \ ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \ : \ a'x + b'y + c' = 0.$$

À quelles conditions les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles :

1. perpendiculaires ;

2. parallèles ;

3. Lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 2. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, le point A et la droite $\mathcal{D}$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \ : \ \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Donner des équations

1. du plan $\mathcal{P}_1$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$;

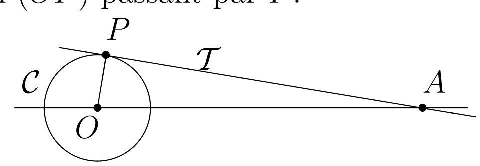
2. du plan $\mathcal{P}_2$ contenant A et $\mathcal{D}$;

3. de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

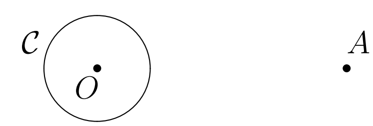
Problème

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et P un point de ce cercle. On rappelle que la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point P est la perpendiculaire au rayon (OP) passant par P.

1. a) Soit A un point extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ une tangente à $\mathcal{C}$ passant par A. Montrer que le point P où $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{C}$ appartient au cercle de diamètre $[OA]$.



b) En déduire, étant donné le cercle $\mathcal{C}$ et un point A extérieur au cercle, une construction des deux tangentes au cercle passant par A.



2. Dans le plan complexe on considère les points O d'affixe 0 et A d'affixe 3 et le cercle unité $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que le point M d'affixe $z \neq 0$ appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$.

b) Montrer que si le point M d'affixe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, appartient au cercle unité $\mathcal{C}$, alors $\frac{z-3}{z} = 1 - 3x + 3iy$.

c) En déduire les affixes des points d'intersections P et P' des deux tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ au cercle $\mathcal{C}$ passant par A.