Durée : 1h30. Calculatrices, documents et téléphones interdits.
Barème : exercice 1 : 5 points, exercice 2 : 7 points, problème : 8 points.

On trouvera dans les encadrés des solutions détaillées aux questions du partiel. Leur seul défaut est de ne pas contenir, pour des raisons techniques, de figures.

Exercice 1. **(Cours)** Soient a, b, c, a', b', c' six réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. On considère dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations :

$$\mathcal{D} \;:\; ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' \;:\; a'x + b'y + c' = 0.$$

À quelles conditions les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles :

1. perpendiculaires ;

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

2. parallèles ;

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$.

3. Lorsque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Le point $M = (x, y)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Ces conditions impliquent que

$$\begin{cases} (ab' - a'b)x + b'c - bc' = 0 \quad (b'L_1 - bL_2) \\ \\ (ab' - a'b)y + ac' - a'c = 0 \quad (aL_2 - a'L_2) \end{cases},$$

les deux droites sont sécantes donc $ab' - a'b \neq 0$ et nous avons donc

$$\begin{cases} x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \\ \\ y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b} \end{cases}.$$

Réciproquement nous vérifions aisément que ce point appartient bien à l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 2. On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, le point A et la droite $\mathcal{D}$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \;:\; \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Donner des équations

1. du plan $\mathcal{P}_1$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$;

Les vecteurs $n_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $n_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont normaux aux deux plans qui définissent $\mathcal{D}$.
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est donc de la forme $x - 3y - 4z + d = 0$ où d est une constante réel. De plus A appartient à $\mathcal{P}_1$, donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}_1$ et $d = 2$.
Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est donc $x - 3y - 4z + 2 = 0$.

2. du plan $\mathcal{P}_2$ contenant A et $\mathcal{D}$;

Le point $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs dans la direction de $\mathcal{P}_2$ car A et B sont des points de $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}_2$. Le vecteur $n = \overrightarrow{AB} \wedge u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.
Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc de la forme $7x + 5y - 2z + d' = 0$ où d' est une constante réelle. De plus A appartient à $\mathcal{P}_2$ donc ses coordonnées vérifient l'équation et donc $d' = -12$.
Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc $7x + 5y - 2z - 12 = 0$.

3. de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

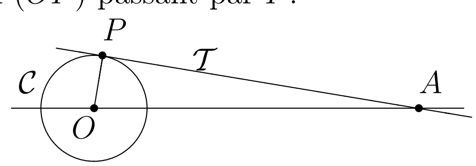
La droite Δ est incluse dans $\mathcal{P}_2$ car elle passe par A et est sécante à $\mathcal{D}$. Par ailleurs Δ et $\mathcal{P}_1$ sont perpendiculaires à $\mathcal{D}$ donc ils sont parallèles, de plus il sont un point commun A donc Δ est incluse $\mathcal{P}_1$. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas confondus (ils sont perpendiculaires) donc Δ est la droite déquation

$$\Delta \ : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 4z + 2 = 0 \\ \\ 7x + 5y - 2z - 12 = 0 \end{array} \right. .$$

Problème

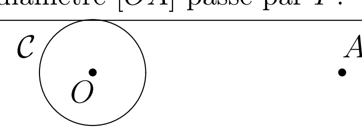
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et P un point de ce cercle. On rappelle que la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point P est la perpendiculaire au rayon (OP) passant par P.

1. a) Soit A un point extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ une tangente à $\mathcal{C}$ passant par A. Montrer que le point P où $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{C}$ appartient au cercle de diamètre $[OA]$.



Le triangle OPA est rectangle en P donc le cercle de diamètre $[OA]$ passe par P.

b) En déduire, étant donné le cercle $\mathcal{C}$ et un point A extérieur au cercle, une construction des deux tangentes au cercle passant par A.



Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de diamètre $[OA]$ et P et P' les deux points d'intersections des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$. Les triangles OAP et OAP' sont rectangles en P et P' respectivement et donc les droites (AP) et (AP') sont les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par A.

2. Dans le plan complexe on considère les points O d'affixe 0 et A d'affixe 3 et le cercle unité $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

a) Montrer que le point M d'affixe $z \neq 0$ appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$.

Supposons que le point M appartient à $\mathcal{C}_1$ et M est différent de O et de A. Alors le triangle OAM est rectangle en M et donc l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})$ est $\pm\frac{\pi}{2}$. Les affixes de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont respectivement $z-3$ et z et nous en déduisons que $\arg(\frac{z-3}{z}) = \pm\frac{\pi}{2}$, c'est à dire que $\frac{z-3}{z}$ est un imagnaire pur et donc que $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$. Si $z = 3$ alors évidemment $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$. Si ce nombre complexe est non nul, c'est à dire si $z \neq 3$ alors c'est un imaginaire pur et son argument vérifie $\arg(\frac{z-3}{z}) = \pm\frac{\pi}{2}$. Or cet argument est l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM})$ et le triangle OMA est donc rectangle en M. Ce qui entraine que M appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$. Enfin si $z = 3$, $M = A$ appartient évidemment au cercle $\mathcal{C}_1$.
Nous avons ainsi démontré que le point M d'affixe $z \neq 0$ appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[OA]$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$.

b) Montrer que si le point M d'affixe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, appartient au cercle unité $\mathcal{C}$, alors $\frac{z-3}{z} = 1 - 3x + 3iy$.

Un point M d'affixe z appartient au cercle unité $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $z\bar{z} = 1$. Un rapide calcul montre alors que

$$\frac{z-3}{z} = 1 - \frac{3}{z} = 1 - \frac{3\bar{z}}{z\bar{z}} = 1 - 3(x - iy) = 1 - 3x - iy.$$

c) En déduire les affixes des points d'intersections P et P' des deux tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ au cercle $\mathcal{C}$ passant par A.

Les points P et P' sont les intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ d'après la quest 1. a). D'après la question 2. a) les affixes de P et P' vérifient $\mathrm{Re}(\frac{z-3}{z}) = 0$. De plus comme ce sont des points de $\mathcal{C}$ la question 2. b) montre que si $z = x + iy$ est l'affixe de P ou P' et $x, y \in \mathbb{R}$ alors $\frac{z-3}{z} = 1-3x+3iy$. Nous en déduisons que $1-3x = 0$, c'est-à-dire que l'abscisse de P et de P' est $\frac{1}{3}$. Comme ce sont des points du cercle unité, leurs ordonnées sont $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Les affixes de P et P' sont donc $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{3}$.