René DESCARTES

LA GÉOMÉTRIE

ÉDITIONS
JACQUES GABAY

Réimpression autorisée par les Éditions Hermann.

25, rue du D^{r} Roux 92330 Sceaux

ISBN 2-87647-019-5

LA

GÉOMÉTRIE

DE

[redacted]

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

MDCCCLXXXVI

LA GÉOMÉTRIE[1]

LIVRE PREMIER

DES PROBLÈMES QU'ON PEUT CONSTRUIRE SANS Y EMPLOYER QUE DES CERCLES ET DES LIGNES DROITES.

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée

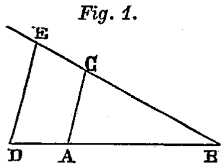
(1) Pour en faciliter la lecture, nous avons substitué à quelques signes employés par Descartes d'autres signes universellement adoptés, toutes les fois que ces changements n'en apportoient pas dans le *principe* de la notation. Le lecteur en sera prévenu.

ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication.

Soit, par exemple, AB *(fig. 1)* l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

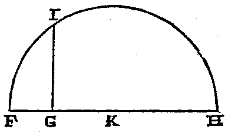
La division.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'extraction de la racine carrée.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH *(fig. 2)*, je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a; et ab pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même (1); et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$,

(1) Cependant Descartes répète presque toujours les facteurs égaux lorsqu'ils ne sont qu'au nombre de deux. Nous avons ici constamment adopté la notation a^2.

pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; et $\sqrt{C.a^3 - b^3 + ab^2}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + ab^2$, et ainsi des autres.

Où il est à remarquer que par a^2, ou b^3, ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'algèbre je les nomme des carrés ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant que ab^2 ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée

$$\sqrt{C.a^3 - b^3 + ab^2};$$

mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $a^2b^2 - b$, il faut penser que la quantité a^2b^2 est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.

Au reste, afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple [1] :

$AB = 1$, c'est-à-dire AB égal à 1.

$GH = a$.

$BD = b$, etc.

Comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes.

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étoient inconnues.

(1) Nous substituons partout le signe $=$ au signe ∞ dont se servoit Descartes.

Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes connues pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune équation. Après cela, s'il en reste encore plusieurs, il se faut servir par ordre de chacune des équations qui restent aussi, soit en la considérant toute seule, soit en la comparant avec les autres, pour expliquer chacune de ces lignes inconnues, et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule égale à quelque autre qui soit connue, ou bien dont le carré, ou le cube, ou le carré de carré, ou le sursolide, ou le carré de cube, etc., soit égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte :

$$z = b,$$
$$\text{ou } z^2 = -az + b^2,$$
$$\text{ou } z^3 = +az^2 + b^2z - c^3,$$
$$\text{ou } z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc.};$$

c'est-à-dire z, que je prends pour la quantité inconnue, est égale à b; ou le carré de z est égal au carré de b moins a multiplié par z; ou le cube de z est égal à a multiplié par le carré de z plus le carré de b multiplié par z moins le cube de c; et ainsi des autres.

Et on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le problème se peut construire par des cercles et des lignes droites, ou aussi par des sections coniques, ou même par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée. Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science. Aussi que je n'y remarque rien de si difficile que ceux qui seront un peu versés en la géométrie commune et en l'algèbre, et qui prendront garde à tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouver.

C'est pourquoi je me contenterai ici de vous avertir que, pourvu qu'en démêlant ces équations, on ne manque point à se servir de toutes les divisions qui seront possibles, on aura infailliblement les plus simples termes auxquels la question puisse être réduite.

Quels sont les problèmes plans.

Et que si elle peut être résolue par la géométrie ordinaire, c'est-à-dire en ne se servant que de lignes droites et circulaires tracées sur une superficie plate, lorsque la dernière équation aura été entièrement démêlée, il n'y restera tout au plus qu'un carré inconnu, égal à ce qui se produit de l'addition ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, et de quelque autre quantité aussi connue.

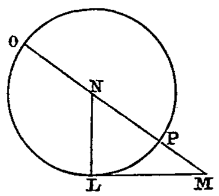
Comment ils se résolvent.

Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément; car si j'ai par exemple

$$z^2 = az + b^2,$$

je fais le triangle rectangle NLM *(fig. 3)*, dont le côté LM est égal à b,

Fig. 3.



racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue qui étoit multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnue; puis prolongeant MN, la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z, la ligne cherchée; et elle s'exprime en cette sorte :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Que si j'ai $y^2 = -ay + b^2$, et que y soit la quantité qu'il faut trouver, je fais le même triangle rectangle NLM, et de sa base MN j'ôte NP égale à NL, et le reste PM est y, la racine cherchée. De façon que j'ai

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Et tout de même si j'avois

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

PM seroit x^2, et j'aurois

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}};$$

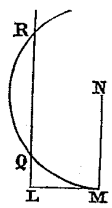
et ainsi des autres.

Enfin, si j'ai

$$z^2 = az - b^2,$$

je fais NM (*fig. 4)* égale à $\frac{1}{2}a$, et LM égale à b, comme devant; puis, au

Fig. 4.



lieu de joindre les points LN, je tire LQR parallèle à MN, et du centre N, par L, ayant décrit un cercle qui la coupe aux points Q et R, la ligne cherchée z est LQ, ou bien LR; car en ce cas elle s'exprime en deux façons, à savoir

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

et

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N passe par le point M, ne coupe ni ne touche la ligne droite L Q R, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible.

Au reste, ces mêmes racines se peuvent trouver par une infinité d'autres moyens, et j'ai seulement voulu mettre ceux-ci, comme fort simples, afin de faire voir qu'on peut construire tous les problèmes de la géométrie ordinaire sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ai expliquées. Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué; car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres où le seul ordre de leurs propositions nous fait connoître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

Exemple tiré de Pappus.

Et on peut le voir aussi fort clairement de ce que Pappus a mis au commencement de son septième livre, où après s'être arrêté quelque temps à dénombrer tout ce qui avoit été écrit en géométrie par ceux qui l'avoient précédé, il parle enfin d'une question qu'il dit que ni Euclide, ni Apollonius, ni aucun autre, n'avoient su entièrement résoudre; et voici ses mots (1) :

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, etc.

Et un peu après il explique ainsi quelle est cette question :

At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat, et ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno et eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; et rectanguli duabus ductis contenti

(1) Je cite plutôt la version latine que le texte grec, afin que chacun l'entende plus aisément.