Aix-Marseille III - Licence 1ère année - M2 - Correction du Partiel 2

Exercice 1. 1. Cours.

2. Très facile.
3. L'hypothèse $u \wedge v = \overrightarrow{0}$ se traduit par la nullité des trois coordonnées du produit vectoriel $u \wedge v$, ou encore par $x_u y_v = x_v y_u$, $y_u z_v = y_v z_u$ et $z_u x_v = z_v x_u$. Si en outre $x_u \neq 0$, alors on déduit de la première et de la troisième de ces relations :
$$y_v = \frac{x_v}{x_u} y_u \quad \text{et} \quad z_v = \frac{x_v}{x_u} z_u \quad .$$
Par conséquent, on a l'identité vectorielle $v = \left(\frac{x_v}{x_u}\right) u$, d'où u et v sont colinéaires.

Exercice 2. On commence par calculer les coordonnées des trois vecteurs suivants :
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Le calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ donne
$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant non nul, on en conclut qu'il existe bien un unique plan $\mathcal{P}$ passant par A, B et C. De plus, $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. Le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AD}$ donne
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0.$$
Il en résulte que la droite (AD), qui est bien définie car $A \neq D$, est parallèle au plan $\mathcal{P}$. Comme elle rencontre $\mathcal{P}$ en A, elle est contenue dans $\mathcal{P}$. En particulier, on a $D \in \mathcal{P}$, d'où A, B, C, D sont coplanaires.

Exercice 3. 1. Considérant la droite (AB) comme la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, on obtient la représentation paramétrique suivante :
$$x = 1 - t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

2. En prenant x pour paramètre, la résolution du système donne la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ suivante :
$$x = t' \qquad y = -t' \qquad z = -3 - 2t' \qquad (t' \in \mathbb{R}).$$

3. Notons C_t un point quelconque de (AB) donné par la représentation paramétrique de la question 1, et $D_{t'}$ un point quelconque de $\mathcal{D}$ donné par la représentation paramétrique de la question 2. On commence par observer que pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, les points C_t et $D_{t'}$ sont distincts (vérification facile), ce qui revient à dire que (AB) et $\mathcal{D}$ ne se rencontrent pas. Ainsi la droite $(C_t D_{t'})$ est bien définie.
On cherche pour quelles valeurs $t, t' \in \mathbb{R}$ la droite $(C_t D_{t'})$ est simultanément perpendiculaire à (AB) et $\mathcal{D}$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs directeurs pour (AB) et $\mathcal{D}$ respectivement, alors la condition se traduit par
$$\overrightarrow{C_t D_{t'}} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{C_t D_{t'}} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$
Prenant par exemple $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} := (1, -1, -2)$, on en déduit que les points C_t et $D_{t'}$ conviennent si et seulement si t et t' sont solutions du système
$$\begin{cases} 9t + 7t' & = -3 \\ 7t + 6t' & = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = 2 \\ t' & = -3 \end{cases}.$$
Ainsi il existe un unique point $C \in (AB)$ et un unique point $D \in \mathcal{D}$ tels que $(CD) \perp (AB)$ et $(CD) \perp \mathcal{D}$. Ce sont les points :
$$C = C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = D_{-3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. 1. D'après le cours, on sait que l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est défini *modulo* 2π, et qu'il est égal à l'argument du nombre complexe $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par ailleurs, le triangle (ABC) est rectangle en A si, par définition, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Ainsi la condition peut s'écrire :
$$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$
La question se ramène donc à établir l'équivalence suivante, pour $z \in \mathbb{C}^*$:
$$\text{Arg}\, z = \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \text{Re}\, z = 0.$$
Si Arg $z = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, alors z s'écrit sous forme exponentielle $z = re^{i\pi/2} = ri$ avec $r > 0$; si Arg $z = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, on a $z = -ri$. Dans un cas comme dans l'autre, on a bien Re $z = 0$, ce qui établit l'implication $\Rightarrow$ ci-dessus.
Réciproquement, si Re $z = 0$, alors z s'écrit $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$. Si $b > 0$, on a Arg $z =$ Arg $i = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; si $b < 0$, on a Arg $z =$ Arg $(-i) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. L'implication $\Leftarrow$ est donc prouvée, d'où l'équivalence.

2. On commence par factoriser le polynôme
$$z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = (z-3)(z-1+2i)(z-1-2i)$$
et on note A, B, C les points d'affixes respectives
$$z_A := 3 \qquad z_B := 1 - 2i \qquad z_C := 1 + 2i \quad .$$
On a alors
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 2i - 3}{1 - 2i - 3} = \frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i.$$
On en déduit, par la question 1, que le triangle (ABC) est rectangle en A.