*Cette feuille de TD est disponible ainsi que de nombreuses autres informations sur* `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~coulbois`.

**Exercice 1.** **1.** Parmi les points suivants lesquels sont alignés ?

$$A = (1,2) \quad B = (\frac{29}{5}, \frac{31}{7}) \quad C = (2, \frac{5}{2}) \quad D = (-1,-2) \quad E = (-\sqrt{12}+1, -\sqrt{3}+2)$$

**2.** Déterminer l'intersection de $(AB)$ et $(CD)$.

**Exercice 2.** **1.** Parmi les droites suivantes déterminer lesquelles sont parallèles, lesquelles sont concourantes, leurs points d'intersection.

$$D_1 \;: 3x - 2y + 1 = 0 \quad D_2 \;: y = 4x - 7 \quad D_3 \;: \begin{cases} x = 4t + 4 \\ y = 6t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
$$D_4 \;: 5x + y = 20 \quad D_5 \;: 2x + 7y - 41 = 0.$$

**2.** Donner les équations du faisceau de droites passant par $A = (3,5)$

**3.** Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $A$ sur $D_3$.

**4.** Déterminer la distance entre les droites $D_1$ et $D_3$.

**5.** Déterminer les équations de la parallèle et de la perpendiculaire à $D_2$ passant par $B = (-1,0)$.

**Exercice 3.** Soit $\lambda$ un réel non nul.

**1.** Donner l'équation de la droite $D_\lambda$ passant par les points $A_\lambda = (\frac{1}{\lambda}, 0)$ et $B_\lambda = (0, \lambda)$.

**2.** Soit $M = (x,y)$ un point du plan. Donner tous les $\lambda$ tels que $M \in D_\lambda$.

**3.** Décrire $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}^\star} D_\lambda$.

**Exercice 4.** On considère les points $A = (0,1)$, $B = (2,2)$, $C = (1,3)$.

**1.** Donner les coordonnées des points $D = (3,-1)$ et $E = (-1,3)$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**2.** Donner une équation dans le repère usuel de la droite $\Delta$ d'équation $X - 2Y + 5 = 0$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**Exercice 5.** Soit $m$ un nombre réel. On considère les vecteurs $e = (1, m+1)$ et $f = (m, 6)$.

**1.** À quelle condition sur $m$, $(e, f)$ est-elle une base du pan vectoriel ?

**2.** Donner les coordonnées $(X, Y)$ du vecteur $u$ dans la base $(e, f)$ en fonction des coordonnées $(x, y)$ de $u$ dans la base usuelle.

**Exercice 6.** Soit $A, B, C$ trois points du plan et $\alpha, \beta, \gamma$ trois réels non nuls tels que les barycentres $G, G_1, G_2, G_3$ de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$, $\{(A,-\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$, $\{(A,\alpha),$ $(B,-\beta)$, $(C,\gamma)\}$ et $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,-\gamma)\}$ existent.

**1.** Montrer que $(AG_1),(BG_2),(CG_3)$ concourent en $G$

**2.** Montrer que $(G_2G_3),(G_1G_3),(G_1G_2)$ passent respectivement par $A, B, C$.

**Exercice 7.** Soit $A, B, C, A', B', C'$ six points du plan tels que les triplets $(A, B, C')$, $(A, B', C)$, $(A', B, C)$ et $(A', B', C')$ sont formés de points alignés et $A, B, C$ ne sont pas alignés. Montrer que les milieux de $(A, A')$, $(B, B')$ et $(C, C')$ sont alignés.

**Exercice 8.** Soit $ABC$ un triangle et $I$ le milieu de $[BC]$. Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

**Exercice 9.** Soit $A, B$ deux points distincts du plan et $k$ un réel strictement positif.

**1.** Montrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MA = k\,MB$ est une droite si $k = 1$ et un cercle si $k \neq 1$. On précisera cette droite ou ce cercle.

**2.** **(Cercle d'Appolonius)** Soit $ABC$ un triangle non dégénéré, $I$ et $J$ les intersections des bissectrices de $(AB)$ et $(AC)$ avec $(BC)$. Montrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

**Exercice 10.** **(Droite de Newton)** Soit $ABC$ un triangle non-dégénéré et $D$ une droite sécante aux côtés du triangle respectivement en $P, Q, R$. Montrer que les milieux $I, J, K$ de $[AP]$, $[BQ]$ et $[CR]$ sont alignés.

**Exercice 11.** **(Théorèmes de Menelaüs et Ceva)** Soit $ABC$ un triangle non dégénéré et $\alpha, \beta, \gamma$ trois réels différents de 1. Soient $A', B', C'$ tels que $\overrightarrow{A'B} = \alpha\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C} = \beta\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{C'A} = \gamma\overrightarrow{C'B}$.

**1.** Montrer que $A', B', C'$ sont alignés si et seulement si $\alpha\beta\gamma = 1$.

**2.** Montrer que $(AA'),(BB'),(CC')$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\alpha\beta\gamma = -1$.