Aix-Marseille III - Licence 1ère année - M3 - TD 2

Exemples de rédaction

Exercice 1

1. On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n_1} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ étant non nul, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants. Ainsi le triplet (A,B,C) définit bien un plan affine $\mathcal{P}_1$ admettant $\overrightarrow{n_1}$ pour vecteur normal. Pour un point $M \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on a alors :

$$M \in \mathcal{P}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n_1} = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'équation cartésienne

$$\mathcal{P}_1 \ : \quad 5x + 7y - z - 12 = 0.$$

2. L'équation générale d'un plan affine parallèle au plan donné est $3x-5y+7z+d=0$. La valeur de d est ensuite déterminée par la condition $A \in \mathcal{P}_2$. On obtient ainsi l'équation cartésienne

$$\mathcal{P}_2 \ : \quad 3x - 5y + 7z + 2 = 0.$$

3. On vérifie que le point B appartient au plan $\mathcal{P}_1$. Par ailleurs, l'équation générale d'un plan affine parallèle à $\mathcal{P}_2$ est $5x+7y-z+d=0$. En ajustant la constante d pour que le point B appartienne à un tel plan, on obtient l'équation $\mathcal{P}_2' :\ 3x - 5y + 7z - 4 = 0$. La droite $\mathcal{D}_1$ cherchée doit donc être contenue dans l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2'$. Comme le montre le calcul de la question suivante, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2'$ ne sont pas parallèles. Par conséquent, leur intersection est bien égale à $\mathcal{D}_1$. En résumé, le système suivant constitue bien un système d'équations cartésiennes pour $\mathcal{D}_1$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 7y - z - 12 & = & 0 \\ 3x - 5y + 7z - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

4. On prend respectivement pour vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n_2} := \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors leur produit vectoriel

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 44 \\ -38 \\ -46 \end{pmatrix}.$$

De la non-nullité de ce dernier on déduit tout d'abord que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles (de même pour $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2'$ dans la question précédente). Par conséquent leur intersection est bien égale à une droite affine, qui admet pour vecteur directeur tout vecteur non nul orthogonal à la fois à $\overrightarrow{n_1}$ et à $\overrightarrow{n_2}$. On peut donc prendre $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ pour vecteur directeur directeur de $\mathcal{D}_2$, ou encore

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}) = \begin{pmatrix} 22 \\ -19 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

1. Notons Δ la droite orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A. Soit $\overrightarrow{n} := (3, -3,2)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. On a alors

$$\Delta = A + \mathbb{R}\overrightarrow{n} = \{A + t\overrightarrow{n} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Cela constitue une équation paramétrique de la droite Δ. Pour trouver les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ (caractérisé par $\mathcal{P} \cap \Delta = \{H\}$), il suffit alors de calculer l'unique valeur du paramètre t pour laquelle le point $A + t\overrightarrow{n}$ appartient à $\mathcal{P}$:

$$3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) + 2(3 + 2t) + 19 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 22t + 22 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1.$$

On obtient ainsi

$$H = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.Notons K le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, caractérisé par les deux conditions $K \in \mathcal{D}$ et $(AK) \perp \mathcal{D}$. La condition $K \in \mathcal{D}$ se traduit par l'existence d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$ tel que $K = B + t\overrightarrow{u}$. La condition d'orthogonalité $(AK) \perp \mathcal{D}$ est alors donnée par le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-9 - t)(-1) + (8 + 3t)3 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3.$$

On trouve ainsi

$$K = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$