# Géométrie affine
# Feuille 1

## I Rappel et compléments d'algèbre linéaire

On désigne par E un espace vectoriel sur le corps **R** des nombres réels.

### 1) Projections et projecteurs, symétries et involutions linéaires

i) Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Rappeler la définition et les caractérisations diverses de cette notion, ainsi que la définition des projections et des symétries associées à la décomposition de E en $E_1 \oplus E_2$ .
Rappeler la définition et les caractérisations classiques de la diagonalisabilité des endomorphismes de E.

ii) Soit p une application linéaire de E dans E vérifiant pop=p (on dit que p est un projecteur).
Montrer que Im(p) et ker(p) sont supplémentaires dans E, et que p est la projection sur Im(p) parallèlement à ker(p).
Retrouver ce résultat d'une deuxième manière, en considérant les valeurs propres de p.
Enoncer une caractérisation des projections associées aux décompositions de E en somme directe.

iii) Soit s une application linéaire de E dans E vérifiant sos=$Id_E$ (on dit que s est une involution linéaire).
Montrer que Opp(s) = {x  E ; s(x)=-x} et Fix(s) = {x  E ; s(x)=x} sont supplémentaires dans E, et que s est la symétrie de base Fix(s) et de direction Opp(s).
Retrouver ce résultat d'une deuxième manière, en considérant les valeurs propres de s.
Enoncer une caractérisation des symétries associées aux décompositions de E en somme directe.

### 2) Centre du groupe linéaire

Soit u un endomorphisme de E.
i) Montrer que si pour tout vecteur x de E, x et u(x) sont liés, alors u est une homothétie.
ii) Montrer que si u commute avec une symétrie s, il laisse invariant Opp(s) et Fix(s).
iii) En déduire que si u commute avec toutes les symétries, alors c'est une homothétie.
iv) Rappeler la définition du groupe linéaire de E, et diverses caractérisations de ses éléments dans le cas où E est de dimension finie.
Déduire des questions précédentes le centre du groupe linéaire GL(E), soit
Z( GL(E) ) = {u  GL(E) ; pour tout v  GL(E), uov=vou}.

**II Espaces affines, barycentres.**

Dans tout ce qui suit on désigne par $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1) Soient A un point de $\mathcal{E}$ et u et v deux vecteurs de E.
Montrer qu'on a :
$(A+u)+v = A+(u+v)$ et $A+\vec{0} = A$ .

2) Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ .

i) Montrer que {A} est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et préciser sa direction.

ii) Qu'est-ce que <{A, B}> ? Généraliser à un nombre fini de points de $\mathcal{E}$ .

3) Soient $\varphi$ une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, et $y_0$ un élément de F.
Montrer que $\varphi^{-1}(\{y_0\})$ est un sous-espace affine de E dont on précisera la direction.

4) Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives $E_1$ et $E_2$ .

i) Montrer que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si, pour tout élément (A, B) de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ , le vecteur $\vec{AB}$ appartient à $E_1+E_2$ . Remarquer que ceci équivaut encore en fait à l'existence d'un couple (A, B) de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ tel que le vecteur $\vec{AB}$ appartient à $E_1+E_2$ .

ii) On suppose que $E_1$ et $E_2$ satisfont à l'égalité $E= E_1+ E_2$ . Montrer que $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ est un sous-espace affine de E non vide et dirigé par $E_1 \cap E_2$ .

5) On considère r points pondérés - éléments de $\mathcal{E} \times$ **R**- notés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_r, \alpha_r)$ ,
et l'application $\vec{f}$ de $\mathcal{E}$ dans E définie par $\vec{f}(M) = \alpha_1 \vec{MA_1} + \ldots + \alpha_r \vec{MA_r}$ .
i) Montrer que f est constante ou bijective (on calculera $\vec{f}(M) - \vec{f}(N)$ ) .
ii) On suppose que $\alpha_1+ \ldots +\alpha_r \neq 0$. Montrer que $\vec{0}$ a un unique antécédent par $\vec{f}$ ; on note G ce point, appelé barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_r, \alpha_r)$ .
Ecrire diverses égalités caractérisant G.
iii) Dans tout ce qui suit on suppose que $\alpha_1+ \ldots +\alpha_r \neq 0$. Montrer qu'on ne change pas G en multipliant tous les « poids » $\alpha_i$ par un nombre réel non nul. En déduire qu'on peut toujours normaliser $(\alpha_1+ \ldots +\alpha_r)$ à 1, et la notion d'isobarycentre.
Montrer qu'on ne change pas G en remplaçant certains $(A_i, \alpha_i)$ par leur barycentre affecté de la somme de leurs poids (quand ceci a un sens).
iv) Montrer le plus rapidement possible que
- si ABC est un triangle, l'isobarycentre de A, B et C est situé à l'intersection des médianes de ABC, avec 3AG=2AI si [AI] est l'une d'entre elles.
- l'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre est aussi le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.