Licence de Mathématiques-Informatique	**Année 2004-2005**

Géométrie affine
Feuille 3

Exemples d'applications affines. Applications à la géométrie élémentaire

On désigne par $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par un **R**-espace vectoriel de dimension finie E, par GA($\mathcal{E}$) le groupe affine de $\mathcal{E}$ et par T($\mathcal{E}$) le sous-groupe des translations de $\mathcal{E}$.

1) Groupe HT($\mathcal{E}$) des homothéties-translations de $\mathcal{E}$

i) On notera $h(\Omega, \lambda)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport λ .
Etudier en fonction de leurs centres et de leurs rapports la nature de la composée de deux homothéties $h_1 = h(\Omega_1, \lambda_1)$ et $h_2 = h(\Omega_2, \lambda_2)$. Lorsque cette composée est une homothétie, on précisera la position de son centre par rapport à Ω_1 et à Ω_2 . Déterminer à quelle condition l'égalité $h_1 o h_2 = h_2 o h_1$ est satisfaite.

ii) L'ensemble des homothéties forme-t-il un sous-groupe de GA($\mathcal{E}$) ?

Trouver des sous-groupes de HT($\mathcal{E}$) strictement compris entre T($\mathcal{E}$) et HT($\mathcal{E}$), et citer si possible un groupe connu qui leur soit isomorphe.

iii) Montrer que l'image par un élément de HT($\mathcal{E}$) d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de même direction.

iv) On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension ≥ 2.

On considère une application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ transformant toute droite en une droite parallèle. Montrer qu'il existe deux points A et B ayant des images A' et B' distinctes par g. Montrer qu'il existe une unique homothétie-translation f telle que $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$.

Comparer f et g successivement sur $\mathcal{E} \setminus (AB)$ et sur (AB) , et en déduire que f=g.

Enoncer grâce à ce qui précède une caractérisation des éléments de HT($\mathcal{E}$) (en dimension ≥ 2).

2) **Projections et symétries affines**

i) Soit p une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $p o p = p$. Préciser la nature de p, après avoir montré qu'elle admet un point fixe.

ii) Soit s une application affine involutive de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Préciser la nature de s, après avoir montré qu'elle admet un point fixe.

3) Affinités

Soit α un nombre réel $\neq 1$, et g une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que pour tout point M de $\mathcal{E}$ on ait $\overrightarrow{g(M)g\circ g(M)} = \alpha\, \overrightarrow{Mg(M)}$.

i) Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$, et M_1 le barycentre de (M, α) et $(g(M), -1)$.
Montrer que M_1 est un point fixe de g.
ii) Soit p l'application qui au point M associe M_1 . Montrer que p est affine, et préciser son endomorphisme associé. En déduire que p est une projection.
iii) Montrer que g est une projection ou une affinité de rapport α.

3) Géométrie élémentaire

Dans tout ce qui suit , $\mathcal{E}$ désigne un plan affine.

i) On considère trois points P, Q et R de $\mathcal{E}$, situés sur les côtés (BC), (CA) et (AB) d'un triangle ABC, et ne coïncidant pas avec l'un des sommets.
En composant l'homothétie de centre P qui transforme B en C et l'homothétie de centre Q qui transforme C en A, montrer le théorème de Menelaüs:
Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\,\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \ .$$

ii) En déduire le théorème de Ceva:
Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles ou concourantes si et seulement si:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\,\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1 \ .$$