Définitions des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et leurs réciproques) sont introduites à partir de la classe de 3e. Je suppose pourtant que vous n'en n'avez jamais vu une définition (une construction) rigoureuse. On part ici du cercle trigonométrique pour définir progressivement ces fonctions et en déduire leurs propriétés bien connues. Ce n'est évidemment pas la seule méthode : on pourrait aussi partir de ces propriétés (notemment l'équation différentielle $y'' + y = 0$) ou de la série entière $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Le (demi-)cercle trigonométrique. Dans tout ce problème on considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a) Préciser le domaine de définition et de dérivabilité de φ.

b) Dresser le tableau de variation de φ.

c) Donner les équations des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ de φ (on détaillera les tangentes en ± 1).

d) Montrer que si M est un point de $\mathcal{C}$, la tangente T à $\mathcal{C}$ au point M est la perpendiculaire à la droite (OM) passant par M.

e) Montrer que $\mathcal{C}$ est exactement le demi-cercle unitaire supérieur fermé.

2. La longueur d'une courbe

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$, on définit la longueur de la courbe représentative de f comme $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt$.

a) Montrer que si f est une fonction affine, cette définition est correcte.

Les deux sous-questions suivantes ne sont à traiter que si vous avez déjà rencontré les sommes de Riemann dans votre cours d'analyse. Elles justifient la formule ci-dessus.

b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Soit $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et soit $M_i = (x_i, f(x_i))$ les points correspondants de la courbe de f. Montrer qu'il existe $\xi_0, \ldots, \xi_n$ tels que $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ et

$$M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}.$$

c) En déduire que la longueur des courbes des fonctions affines par morceaux qui approchent f est l, au sens où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} = b,$$

$$(\bigwedge_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) < \eta) \Rightarrow |l - M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}| < \varepsilon.$$

Cette formule dit exactement que la longueur de la courbe est la limite des longueurs des courbes affines par morceaux qui l'approchent quand on fait tendre le « pas » de ces approximations vers zéro.

3. Arccosinus La mesure d'un angle en radian est la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 limité par cet angle. Nous allons donner un sens précis à cette définition.

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente (on étudiera séparément la convergence en 1 et -1 en comparant l'intégrale avec celle de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0).

b) Soit $x \in [-1, 1]$, M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et θ l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. Montrer que $\theta = \int_{x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

On définit ainsi $\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

c) Rappeler la formule d'encadrement de π donnée par Archimède.

Pour tout $x \in [-1, 1]$ on définit donc $\arccos x = \int_{x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

d) Montrer que cette fonction est continue.

e) Montrer que arccosinus est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\forall x \in]-1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ces deux résultats sont évidemment généraux pour les intégrales dépendant d'un paramètre, on les démontrera ici rigoureusement en revenant aux définitions de la continuité et du nombre dérivé et en utilisant la continuité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

f) Dresser le tableau de variation de arccosinus et montrer que c'est une bijection de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

g) Montrer que $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ (on coupera en deux l'intégrale qui définit π et on utilisera un changement de variable approprié, cependant comme ces intégrales sont impropres on sera vigilant avec les problèmes de convergence).

4. Cosinus, continuité, dérivabilité. On appelle cosinus la fonction réciproque de arccosinus.

a) Montrer que cosinus est une fonction continue.

b) Montrer que cosinus est une fonction dérivable, que sa dérivée est négative et qu'elle vérifie : $\cos' \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

Ces deux résultats sont aussi tout à fait généraux pour la fonction réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas, on les démontrera ici rigoureusement.

On appelle sinus l'opposée de la dérivée de cosinus.

c) Montrer que sinus est une fonction continue et dérivable et calculer sa dérivée.

d) Montrer qu'il existe un unique prolongement de cosinus en une fonciton paire et périodique de période 2π. Montrer que cette fonction, toujours appelée, cosinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On définit alors sinus sur $\mathbb{R}$ par $\sin \theta = -\cos' \theta$.

e) Montrer que sinus est impaire et 2π périodique.

f) Montrer que pour tout réel θ, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

g) Montrer que sinus et cosinus sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

On pourrait montrer que ce sont les uniques solutions de cette équation différentielle avec les conditions initiales $\cos 0 = 1$, $\cos' 0 = 0$, $\sin 0 = 0$ et $\sin' 0 = 1$. Il faudrait pour cela connaître quelques résultats sur les équations différentielles.

5. Formules trigonométriques.

a) Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arccos x + \arccos \sqrt{1-x^2}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

b) En déduire que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$.

c) Soit $x \in [0,1]$ on définit pour $x' \in [0,1]$,

$$f_x(x') = \arccos x + \arccos x' - \arccos(xx' - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x'^2}).$$

En dérivant, montrer que la fonction f_x est constante égale à zéro (on vérifiera que f_x est bien définie).

d) En déduire que pour tous réels $\theta, \theta' \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'$.

e) En déduire les formules usuelles de la trigonométrie.