Documents et calculatrices interdits, téléphones portables éteints et rangés

Trois heures

Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

$\mathbb{E}_n$ désigne l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique.

1. Décrire géométriquement et en terme de matrice les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_2$.

Les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_2$ sont :

1. Les rotations. Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{E}_2$ la matrice de la rotation vectorielle r_θ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est $[r_\theta]_{\mathcal{B}'} = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. θ est défini modulo 2π
2. Les symétries axiales. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ la matrice de la symétrie axiale s_θ dont l'axe fait l'angle géométrique $\theta \in \mathbb{R}$ avec l'axe des abscisses est

$$[s_\theta]_{\mathcal{B}'} = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

θ est défini modulo π. Dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}_\theta$ dont le premier vecteur forme un angle θ avec e_0, la matrice de s_θ est

$$[s_\theta]_{\mathcal{B}_\theta} = S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que les matrices S_0 et S_θ sont semblables.

2. Décrire géométriquement et en terme de matrice les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_3$.

Les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_3$ sont les rotations (parmi lesquelles nous pouvons distinguer les demi-tours qui sont les rotations d'angle π) et les anti-rotations (parmi lesquelles nous pouvons distinguer les symétries orthogonales par rapport à un plan qui sont les anti-rotations d'angle nul et la symétrie centrale qui est l'anti-rotations d'angle π). Rappelons qu'une anti-rotation est la composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation.
Si f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{E}_3$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

f est une rotation si le dernier coefficient est $+1$ et une anti-rotation si le dernier coefficient est -1, θ est défini modulo 2π, c'est l'angle de la rotation ou de l'anti-rotation. L'axe de la rotation ou de l'anti-rotation est dirigé par le troisième vecteur de la base $\mathcal{B}'$.

3. Démontrer que les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension n. Soit f une isométrie de $\mathbb{E}_n$. Si f est l'identité il n'y a rien à démontré.
Sinon, soit u un vecteur de $\mathbb{E}_n$ tel que $f(u) \neq u$, soit V l'hyperplan médiateur de u et $f(u)$ c'est à dire puisque $\|u\| = \|f(u)\|$ que V est l'hyperplan orthogonal à $v = f(u) - u \neq 0$: $V = v^{\perp}$. Soit s_V la symétrie orthogonale par rapport à V et $g = s_V \circ f$. Nous vérifions que $g(u) = s_V(f(u)) = u$. Puisque g est dans le groupe orthogonal et que u est un vecteur non-nul invariant par g, l'hyperplan $H = u^{\perp}$ orthogonal à u est invariant par g.
Soit h la restriction de g à H. Alors h est une isométrie vectorielle de H, $\dim H = n-1$. Par hypothèse de récurrence $O(H) = O_{n-1}(\mathbb{R})$ est engendré par les symétries orthogonales. Il existe $s_{V_1}, \ldots, s_{V_r}$ des symétries orthogonales par rapport à des hyperplans $V_1, \ldots, V_r$ de H telles que $h = s_{V_1} \cdots s_{V_r}$.
Soit $H_i = V_i \oplus \mathbb{R}u$, cette somme est directe car $V_i \subseteq H$ et $\mathbb{E}_n = H \oplus \mathbb{R}u$. Soit $s_{H_1}, \ldots, s_{H_r}$ les symétries orthogonales par rapport aux hyperplans $H_1, \ldots, H_r$ de $\mathbb{E}_n$. L'hyperplan H est invariant par ces symétries et la restriction de s_{H_i} à H est s_{V_i}. Nous en déduisons que pour tout élément x de H

$$s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}(x) = s_{V_1} \circ \cdots \circ s_{V_r}(x) = h(x) = g(x).$$

De plus, u est dans H_i et donc $s_{H_i}(u) = u$ et donc

$$s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}(u) = u = g(u).$$

Enfin puisque $\mathbb{E}_n = H \oplus \mathbb{R}u$ nous avons montré que pour tout élément x de $\mathbb{E}_n$ $s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}(x) = g(x)$.
Ce qui nous permet de conclure que $f = s_V \circ g = s_V \circ s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}$. Ce qui conclut la preuve par récurrence.

Exercice I. *Les questions sont indépendantes.*

1. En utilisant la forme normale de Jordan calculer les puissances n-ièmes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, nous avons $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Nous savons que pour tout entier n, $J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et donc

$$A^n = P(J^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - 2n & 2 + 3n - 2^{n+1} & -1 - n + 2^n \\ 2^{n+1} - 2 - 2n & 5 + 3n - 2^{n+2} & -2 - n + 2^{n+1} \\ 2^{n+2} - 4 - 2n & 8 + 3n - 2^{n+3} & -3 - n + 2^{n+2} \end{pmatrix}.$$

2. Soit r_1 la rotation de $\mathbb{E}_3$ d'axe orienté e_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de $\mathbb{E}_3$ d'axe orienté e_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que r_1 et r_2 ne commutent pas et décrire géométriquement $r = {r_1}^{-1}{r_2}^{-1}r_1r_2$.

Nous constatons facilement que $r_2 \circ r_1(e_1) = -e_3$ alors que $r_1 \circ r_2(e_1) = e_2$ et donc que r_1 et r_2 ne commutent pas.
$\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ne contient que des rotations, donc r est une rotation. Nous devons calculer son axe et son angle.
Dans la base canonique $\mathcal{B}$ les matrices sont

$$[r_1]_{\mathcal{B}} = R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } [r_2]_{\mathcal{B}} = R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons l'image de la base canonique par ${r_1}^{-1}{r_2}^{-1}r_1r_2$.

$$\begin{array}{ccccccccc} & \overset{r_2}{} & & \overset{r_1}{} & & \overset{{r_2}^{-1}}{} & & \overset{{r_1}^{-1}}{} & \\ e_1 & \mapsto & -e_3 & \mapsto & e_2 & \mapsto & e_2 & \mapsto & -e_3 \\ e_2 & \mapsto & e_2 & \mapsto & e_3 & \mapsto & -e_1 & \mapsto & -e_1 \\ e_3 & \mapsto & e_1 & \mapsto & e_1 & \mapsto & e_3 & \mapsto & e_2 \end{array}$$

Ce qui nous donne la matrice

$$R = [r]_{\mathcal{B}} = {R_1}^{-1}{R_2}^{-1}R_1R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1 est $u = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ il détermine l'axe de la rotation r.
Le calcul de r^3 montre que r est d'ordre 3 et r est donc une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$.
Enfin la base (non-orthonormée !) $(u, e_1, r(e_1) = -e_3)$ est directe (on peut caluler le produit mixte ou faire un dessin) et donc r est la rotation d'axe orienté par u et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3. Donner une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ qui est semblable à une matrice orthogonale et qui n'est pas orthogonale.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice qui n'est pas orthogonale et qui est semblable à la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Démontrer que si deux matrices A et B de $U_n(\mathbb{C})$ sont semblables alors elles sont conjuguées dans $U_n(\mathbb{C})$.

A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée, donc il existe des matrices unitaires P et Q telles que

$$D =^t \bar{P}AP \text{ et } D' =^t \bar{Q}BQ$$

sont diagonales. Les valeurs propres de A et B comptées avec multiplicités sont les mêmes puisque A et B sont semblables. D et D' sont donc deux matrices diagonales qui ont les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité. Il existe donc une permutation de S_n dont la matrice associée R conjugue D en D' : $R^{-1}DR = D'$. La matrice d'une permutation est réelle et orthogonale donc unitaire. Ainsi D et D' sont conjuguées dans $U_n(\mathbb{C})$ et A et B sont conjuguées dans $U_n(\mathbb{C})$: ${}^t\overline{(PR^t\bar{Q})}A(PR^t\bar{Q}) = B$.

5. Donner deux matrices A et B qui vérifient simultanément :

1. A et B ne sont pas semblables ;
2. A et B ont le même polynôme caractéristique ;
3. A et B ont le même polynôme minimal ;

4. chaque valeur propre λ a la même multiplicité géométrique pour A et B.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont une seule valeur propre 0, leur polynôme caractéristique est donc $P_A(X) = P_B(X) = -X^7$, leur polynôme minimal est donné par la taille du plus grand bloc de Jordan, $m_A(X) = m_B(X) = X^3$, la multiplicité géométrique de 0 est le nombre de blocs de Jordan, c'est à dire 3.

A et B ne sont pas semblables car elles n'ont pas la même forme normale de Jordan : B possède deux blocs de Jordan de taille 2 et pas A aucun.

Problème : Commutant d'une matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier.

Le **commutant d'une matrice** $A \in M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent avec A :

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}.$$

1. Structure algébrique de $C(A)$. Montrer successivement que

a. $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$;

La matrice nulle est dans $C(A)$. $\forall M, N \in C(A)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N)$ et donc $(\lambda M + \mu N)$ est dans $C(A)$. $C(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

b. pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $P(A) \in C(A)$.

Pour tout entier r, $A^r A = A^{r+1} = AA^r$. La première question permet alors de conclure.

c. si P est une matrice inversible

$$C(P^{-1}AP) = P^{-1}C(A)P.$$

$\forall M \in C(A)$, $(P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = P^{-1}MAP = P^{-1}AMP = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP)$ donc $P^{-1}MP$ est dans $C(P^{-1}AP)$. Nous avons montré que $P^{-1}C(A)P \subseteq C(P^{-1}AP)$.
Réciproquement, soit M une matrice de $C(P^{-1}AP)$ alors d'après l'inclusion précédente appliquée en remplaçant A par $P^{-1}AP$ et P par P^{-1}, $N = PMP^{-1}$ est dans $C(P(P^{-1}AP)P^{-1}) = C(A)$. Et comme $M = P^{-1}NP$, M est dans $P^{-1}C(A)P$, ce qui montre l'inclusion $C(P^{-1}AP) \subseteq P^{-1}C(A)P$.

2. Commutant d'un bloc de Jordan. Soit r un entier positif, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $J_{\lambda,r}$ le bloc de Jordan de taille r et de valeur propre λ.

a. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(\mathbb{K})$ une matrice. Calculer $J_{0,r}M$ et $MJ_{0,r}$.

Par le calcul nous obtenons :

$$J_{0,r}M = \begin{pmatrix} m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,r} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & \dots & m_{3,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r,1} & m_{r,2} & \dots & m_{r,r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MJ_{0,r} = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,r-1} \\ 0 & m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{r,1} & m_{r,2} & \dots & m_{r,r-1} \end{pmatrix}.$$

b. En déduire que $C(J_{0,r})$ est composé des matrices de la forme

$$a_0 I_r + a_1 J_{0,r} + a_2 {J_{0,r}}^2 + \dots + a_{r-1} {J_{0,r}}^{r-1}$$

où $a_0, \dots, a_{r-1}$ sont des scalaires.

En identifiant les deux matrices calculées ci-dessus nous obtenons les équations suivantes :

$$m_{2,1} = m_{3,1} = \ldots = m_{r,1} = 0$$

$$m_{r,1} = m_{r,2} = \ldots = m_{r,r-1} = 0$$

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} \text{ pour } i = 1, \ldots, r-1 \text{ et } j = 1, \ldots, r-1$$

Nous en déduisons en posant $a_i = m_{1,i+1}$ pour $i = 0, \ldots, r-1$ que M commute avec A si, et seulement si,

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{r-2} & a_{r-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & & a_{r-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I_r + a_1 J_{0,r} + a_2 {J_{0,r}}^2 + \cdots + a_{r-1} {J_{0,r}}^{r-1}.$$

c. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $C(J_{\lambda,r}) = C(J_{0,r})$.

$J_{\lambda,r} = \lambda I_r + J_{0,r}$ et comme λI_r commute avec toutes les matrices, si une matrice commute avec $J_{0,r}$ alors elle commute avec $J_{\lambda,r}$.
Réciproquement $J_{0,r} = J_{\lambda,r} - \lambda I_r$ et nous obtenons l'autre inclusion.

3. Commutant et décomposition en sous-espaces caractéristiques. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ qui commutent.

a. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $\ker P(f)$ est un sous-espace invariant par g.

Soit $u \in \ker P(f)$. En reprenant la démonstration faite à la question 1.b $P(f)$ et g commutent. Nous calculons $P(f)(g(u)) = (P(f) \circ g)(u) = (g \circ P(f))(u) = g(P(f)(u)) = g(0) = 0$ et nous constatons que $g(u) \in \ker P(f)$: $\ker P(f)$ est invariant par g.

b. En déduire que chaque sous-espace propre et chaque sous-espace caractéristique de f est invariant par g.

En appliquant la question précédente à $P(X) = X - \lambda$ nous obtenons que le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est invariant par g. En utilisant $P(X) = (X - \lambda)^n$ nous obtenons que le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ est invariant par g.

c. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc f a au moins une valeur propre λ. D'après la question précédente E_λ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est invariant par g. Soit h la restriction de g à E_λ. h admet au moins une valeur propre μ associé au vecteur propre $u \in E_\lambda$. Nous constatons alors que $g(u) = h(u) = \mu u$ et que $f(u) = \lambda u$. u est un vecteur propre commun à f et g.

d. Pour toute valeur propre λ de f et toute valeur propre μ de g on désigne par $N_{\lambda,\mu}$ l'intersection du sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ et du sous-espace caractéristique de g associé à la valeur propre μ :

$$N_{\lambda,\mu} = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^n \cap \ker(g - \mu \mathrm{id})^n.$$

Toujours dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f), \mu \in \mathrm{Spec}(g)} N_{\lambda,\mu}$.

Le théorème de décomposition en sous-espace caractéristique nous donne que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} N_\lambda$$

où $N_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^n$ est le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ. Pour chaque λ dans $\mathrm{Spec}(f)$ soit h_λ la restriction de g à N_λ. Toujours d'après le théorème de décomposition des noyaux

$$N_\lambda = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Spec}(h_\lambda)} M_{\lambda,\mu}.$$

où $M_{\lambda,\mu} \ker(h_\lambda - \mu \mathrm{id})^n$ est le sous-espace caractéristique de h_λ associé à la valeur propre μ. Nous constatons aisément que $M_{\lambda,\mu} = \ker(f - \lambda\mathrm{id})^n \cap \ker(g - \mu\mathrm{id})^n = N_{\lambda,\mu}$. En regroupant les décompositions obtenues nous obtenons la décomposition recherchée.

4. Application. Calculer le commutant dans $M_2(\mathbb{R})$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ nous avons $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la question 2.b. le centralisateur de J est formé des matrices $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix}$ où a_0 et a_1 sont deux réels.
En utilisant la question 1.c. nous en déduisons que

$$C(A) = PC(J)P^{-1} = \{P \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\begin{pmatrix} a_0 - 2a_1 & 2a_1 \\ -2a_1 & a_0 + 2a_1 \end{pmatrix} | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a_0 I_2 + a_1(A - I_2) | a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} = \{b_0 I_2 + b_1 A | b_0, b_1 \in \mathbb{R}\}$$