Documents et calculatrices interdits, téléphones portables éteints et rangés

Trois heures

Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

$\mathbb{E}_n$ désigne l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique.

1. Décrire géométriquement et en terme de matrice les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_2$.

2. Décrire géométriquement et en terme de matrice les isométries vectorielles de $\mathbb{E}_3$.

3. Démontrer que les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans engendrent $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice I. *Les questions sont indépendantes.*

1. En utilisant la forme normale de Jordan calculer les puissances n-ièmes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Soit r_1 la rotation de $\mathbb{E}_3$ d'axe orienté e_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de $\mathbb{E}_3$ d'axe orienté e_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que r_1 et r_2 ne commutent pas et décrire géométriquement $r = {r_1}^{-1}{r_2}^{-1}r_1r_2$.

3. Donner une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ qui est semblable à une matrice orthogonale et qui n'est pas orthogonale.

4. Démontrer que si deux matrices A et B de $U_n(\mathbb{C})$ sont semblables alors elles sont conjuguées dans $U_n(\mathbb{C})$.

5. Donner deux matrices A et B qui vérifient simultanément :

1. A et B ne sont pas semblables ;
2. A et B ont le même polynôme caractéristique ;
3. A et B ont le même polynôme minimal ;
4. chaque valeur propre λ a la même multiplicité géométrique pour A et B.

Problème : Commutant d'une matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps et n un entier.

Le **commutant d'une matrice** $A \in M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent avec A :

$$C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}.$$

1. Structure algébrique de $C(A)$. Montrer successivement que

a. $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$;

b. pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, $P(A) \in C(A)$.

c. si P est une matrice inversible

$$C(P^{-1}AP) = P^{-1}C(A)P.$$

2. Commutant d'un bloc de Jordan. Soit r un entier positif, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $J_{\lambda,r}$ le bloc de Jordan de taille r et de valeur propre λ.

a. Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq r} \in M_r(\mathbb{K})$ une matrice. Calculer $J_{0,r}M$ et $MJ_{0,r}$.

b. En déduire que $C(J_{0,r})$ est composé des matrices de la forme

$$a_0 I_r + a_1 J_{0,r} + a_2 {J_{0,r}}^2 + \cdots + a_{r-1} {J_{0,r}}^{r-1}$$

où $a_0, \ldots, a_{r-1}$ sont des scalaires.

c. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $C(J_{\lambda,r}) = C(J_{0,r})$.

3. Commutant et décomposition en sous-espaces caractéristiques. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ qui commutent.

a. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $\ker P(f)$ est un sous-espace invariant par g.

b. En déduire que chaque sous-espace propre et chaque sous-espace caractéristique de f est invariant par g.

c. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

d. Pour toute valeur propre λ de f et toute valeur propre μ de g on désigne par $N_{\lambda,\mu}$ l'intersection du sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ et du sous-espace caractéristique de g associé à la valeur propre μ :

$$N_{\lambda,\mu} = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^n \cap \ker(g - \mu \mathrm{id})^n.$$

Toujours dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Spec}(f),\mu\in\mathrm{Spec}(g)} N_{\lambda,\mu}$.

4. Application. Calculer le commutant dans $M_2(\mathbb{R})$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.