Exercice I. Soit K un corps commutatif.

1. Reprendre la définition connue de la fonction

$$\det : M_n(K) \to K \ .$$

Montrer que, via l'identification naturelle $M_n(K) = [K^n]^n$ (laquelle ?), det est une forme n-linéaire alternée.

2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la correspondance connue entre endomorphismes et matrices carrées, introduire une fonction det sur $\mathrm{End}(E)$ et vérifier que cette fonction est bien définie.

3. Donner les definitions de

a. valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme (d'une matrice), espace propre associé à une valeur propre, multiplicité algébrique, multiplicité géométrique.

b. polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme.

4. Préciser le coefficient de X^{n-1} et le terme de degré 0 du polynôme caractéristique $P_A(X)$ d'une matrice $A \in M_n(K)$.

Exercice II. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas préciser si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner, le cas échéant, explicitement une matrice semblable diagonale (respectivement triangulaire).

Exercice III. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre *complexe* de A. Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et que, si l'on désigne par $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ l'espace propre de A considerée comme matrice complexe, alors on a $E_{\bar{\lambda}} = \bar{E}_\lambda$. Application : diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice IV. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

définit, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, un endomorphisme que l'on notera u.

1. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (préciser, bien sûr, cette matrice).

2. Déterminer enfin une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice V. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables ou non :

1. les 4 matrices de l'exercice 2 ;

2. la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ (discuter selon les valeurs de a,b et c).

Exercice VI. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et inversible. En déduire le polynôme minimal $m_A(X)$ et, en utilisant celui-ci, déterminer A^{-1}.

Exercice VII. Classifier, à similitude près, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 5. Dans chaque cas, préciser le polynôme minimal.

Exercice VIII. En discutant selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les sous-espaces caractéristiques et donner une forme réduite de Jordan (en précisant une matrice de passage) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice IX. Soit $A \in M_6(\mathbb{C})$ telle que

$$P_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2 \ , \ m_A(X) = (X-1)^2(X-2).$$

Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ? Quelles sont les formes de Jordan possibles ?