Exercice I. Cauchy-Schwarz. Soit E un espace vectoriel complexe et φ une forme hermitienne positive. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Décrire les cas d'égalité.

Exercice II. 1. Tracer la conique $x^2 + 2xy = 4$.

2. Montrer que l'équation $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz + 30x - 24y + 20z = 63$ définit un hyperboloïde de révolution dont on déterminera le centre et l'axe de rotation.

Exercice III. Soit f et g deux endomorphismes linéaires d'un k-espace vectoriel E de dimension finie qui commutent ($f \circ g = g \circ f$).

1. Montrer que tout sous-espace caractéristique de l'un est invariant par l'autre.

2. Montrer que si ils sont tous les deux trigonalisables alors ils sont simultanément trigonalisables.

3. Montrer que si ils sont tous les deux diagonalisables alors ils sont simultanément diagonalisables.

Exercice IV. Classification des espaces euclidiens et hermitiens. Soient (E, f) et (E', f') deux espaces euclidiens (resp. hermitiens) de même dimension. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $u : E \to E'$ tel que

$$\forall x,\ y \in E, \quad \langle u(x), u(y)\rangle_{f'} = \langle x, y\rangle_f.$$

Exercice V. Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que $f := \mathrm{Re}(h)$ est un produit scalaire sur E, tandis que $\omega := \mathrm{Im}(h)$ est une forme antisymétrique non-dégénérée sur E.

Exercice VI. Topologie des groupes linéaires.

1. Démontrer que les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$, considérés comme sous-espaces topologiques de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), sont compacts.

2. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

4. Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

Exercice VII. Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E. Le groupe de q est $G(q) = \{g \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall x \in E,\ q(g(x)) = q(x)\}$. Montrer que si q et q' ont la même signature alors $G(q)$ et $G(q')$ sont isomorphes (*Indication : on pourra montrer que g laisse invariant les formes polaires associées et généraliser l'exercice IV*).

Exercice VIII. **1.** Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que l'application $M_n(K) \times M_n(K) \to K$ donnée par $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

2. Montrer que, sur $\mathfrak{sl}_2(K)$, la forme quadratique associée à la forme $(A, B) \to \mathrm{tr}(AB)$ est donnée par $A \mapsto -2\det(A)$.

3. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\bar{A}\ B)$ est un produit hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA\ B)$ définit un produit scalaire euclidien sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice IX. **Algèbres de Lie.** Désignons par

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) |\ {}^tA = -A\} \text{ et } \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) |\ \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.

2. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M_n(\mathbb{R})$ un chemin différentiable tel que

(a) $\gamma(0) = I_n$ (b) $\mathrm{Im}(\gamma) \subset SO_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$).

Démontrer que $\dot\gamma(0) \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\dot\gamma(0) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$).

3. **a.** Réciproquement, démontrer que pour tout $A \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$) le chemin différentiable $t \mapsto \exp(ta)$ satisfait aux propriétés (a) et (b).

b. En déduire que

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\},$$

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\}.$$

Quelle est l'interpretation géométrique des ces égalités ?

4. **a.** Montrer que le **crochet de Lie** : $\begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & [A, B] = AB - BA \end{array}$ est une application bilinéaire antisymétrique qui vérifie l'**identité de Jacobi** :

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

b. Montrer que $[., .]$ se restreint à $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ et définit sur ces espaces des structures d'**algèbre de Lie**.