Exercice 1. **1.** Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ est une variété compacte de dimension 3.

2. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$ et $\phi : \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{S}^2 \\ f & \mapsto & f(e_1) \end{array}$. Montrer que les fibres de ϕ sont des cercles $\mathbb{S}^1$.

3. Est-ce que $SO_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$?

4. À l'aide d'une bande de papier, se convaincre que $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2. **1.** Soit P un point de $\mathbb{S}^3$. Montrer que $U = \mathbb{S}^3 - \{P\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $T = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid (\rho - 1)^2 + z^2 \leq \frac{1}{4}\}$ où (ρ, ϕ, z) sont les coordonnées cylindriques de M. On désigne aussi par T l'image inverse de T par l'homéomorphisme de la question précédente (ou plus généralement par tout homéomorphisme entre un ouvert de $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{R}^3$). Montrer que le complémentaire de l'intérieur de T dans $\mathbb{S}^3$ est homéomorphe à T.

Exercice 3. **1.** Soit a le méridien d'un tore et b son équateur. Faire une succession de dessin pour montrer que $ab = ba$ dans le groupe fondamental.

2. Soit S la surface à bord obtenue en enlevant un disque au tore. Montrer que S peut se rétracter par déformation sur un 8.

Exercice 4. Soit X_n l'espace des applications injectives de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{D}^2$, le disque unité ouvert du plan euclidien. On munit X_n de la topologie induite par la topologie produit.

1. Montrer que X_1 est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$.

2. Montrer que X_n est une variété de dimension 2^n.

3. Montrer que X_n est connexe. Est-il compact ?

4. Montrer que X_2 peut être contracté par déformation sur $\mathbb{S}^1$ (ici $\mathbb{S}^1$ est le cercle centré en l'origine et de rayon $\frac{1}{2}$).

Le groupe fondamental de X_n : $PB_n = \pi_1(X_n)$ est le groupe des tresses pures à n brins.

On considère maintenant l'espace Y_n des parties à n éléments de $\mathbb{D}^2$, muni de la topologie (ou de la distance) de Haussdorf.

5. Reprendre les quatre questions précédentes (pour la quatrième question on montrera que Y_2 peut être contracté sur l'espace des paires de points de $\mathbb{S}^1$ qui est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$).

Le groupe fondamental de Y_n : $B_n = \pi_1(Y_n)$ est le groupe des tresses à n brins.

Il est engendré par les éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ indiqués sur le dessin.

6. Montrer (par des dessins) que $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.