Université Paul-Cézanne — Licence MI, S4 2006/2007

Algèbre et arithmétique – premier partiel

1 heure, calculatrice et documents interdits.

Question de cours (6 points). Énoncer et démontrer le théorème de Gauss.

Exercice 1 *Les questions sont indépendantes.*

1) Démontrer que si a et b divisent c et si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors ab divise c. Est-ce que c'est encore vrai si $\mathrm{pgcd}(a, b) \neq 1$?
2) Soit a et b deux entiers strictement positifs, montrer que $ab = \mathrm{ppcm}(a, b).\mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 2

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $18u + 7v = 1$.
2) Quel est l'inverse de 7 dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
3) Donner la liste des inversibles de $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit p un nombre premier.
1) Montrer qu'il existe un entier strictement positif ℓ tel que p divise $10^\ell - 1$.
2) Donner une valeur de ℓ pour $p = 3$, $p = 7$ et $p = 11$.
3) Soit ℓ tel que p divise $10^\ell - 1$. Soit a_0 un nombre parmi $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. On définit par récurrence la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_{n+1} est le reste de la division euclidienne de $10a_n$ par p.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a_0$ par p.

b) Montrer que $a_\ell = a_0$.

c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique dont ℓ est une période.

d) Donner la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $p = 7$ et $a_0 = 3$.