Algèbre et arithmétique – deuxième partiel

1 heure, calculatrice et documents interdits.

Question de cours (6 points). Donner la définition d'un homomorphisme de groupes et du noyau. Montrer que le noyau est un sous-groupe du groupe de départ.

Exercice 1 Soit α l'élément du groupe symétrique S_{11} défini par

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 7 & 11 & 1 & 8 & 3 & 2 & 10 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer α^{-1}.
2) Décomposer α en produit de cycles à supports disjoints.
3) Déterminer la signature de α.
4) Déterminer l'ordre de α, puis en déduire α^{38}.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi $\star$:

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad (a,b) \star (a',b') = (aa', ab' + b).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe.

Exercice 3

Soit n un entier et $\alpha \in S_n$ une permutation d'ordre m impair.
1) Montrer que pour un entier $k \in \mathbb{Z}$ la permutation α^k ne dépend que du reste de la division euclidienne de k par m.
2) En utilisant le théorème de BÉZOUT, montrer qu'il existe un entier k tel que $\alpha^{2k} = \alpha$.
3) En déduire que $\mathrm{sign}(\alpha) = 1$.
4) Donner une permutation $\beta \in S_n$ d'ordre pair telle que $\mathrm{sign}(\beta) = 1$.