Exercice I. Dessiner des diagrammes de Venn pour illustrer l'inclusion, la disjonction, l'intersection, la réunion de deux ensembles.

Exercice II. Pour chacun des exemples suivants écrire l'ensemble en donnant ses premiers éléments et sous forme compréhensive. (Exemple : l'ensemble des nombres entiers pairs est $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$).

1. Les nombres impairs.

2. Les puissances de 2.

3. Les nombres dont le chiffre des unités est 2.

4. Les multiples de 3.

5. Écrire les inclusions entre ces cinq ensembles.

6. Décrire les dix intersections de ses ensembles deux à deux.

Exercice III. **1.** Reprendre les cinq ensembles précédents et démontrer qu'ils sont infinis et dénombrables.

2. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini et dénombrable.

Exercice IV. **Des séries et des nombres. 1.** Rappeler les identités remarquables $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, etc.

2. Démontrer par récurrence sur n que $(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}$.

En passant à la limite quand $|q| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Par exemple, le paradoxe de Zénon, se résoud en calculant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

3. Écrivez $0,111111\dots$ comme la somme d'une série géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et exprimer ce nombre comme une fraction.

4. *(Plus difficile)* Exprimez de même $17,1717171717\dots$ avec des séries puis sous forme de fraction(attention au début des séries (0 ou 1 ou même 2 ?).

Exercice V. **Écriture décimale des nombres. 1.** Sauriez-vous expliciter les règles d'addition et de multiplication entre deux nombres donnés par leur écriture décimale : $c_3c_2c_1c0, c_{-1}c_{-2}$ et $d_2d_1d0, d_{-1}d_{-2}$?

2. Écrivez en chiffres binaires (base 2) puis en base 3 le nombre dont l'écriture décimale est 2017.

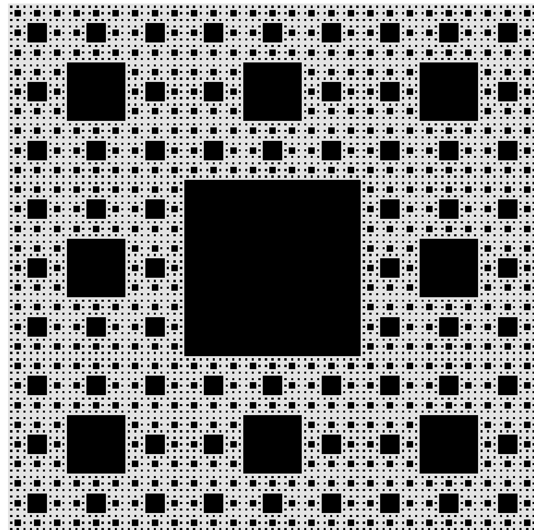
3. Quelle est l'écriture décimale du nombre dont l'écriture binaire est 101011 ?

Exercice VI. Variantes de l'ensemble de Cantor.

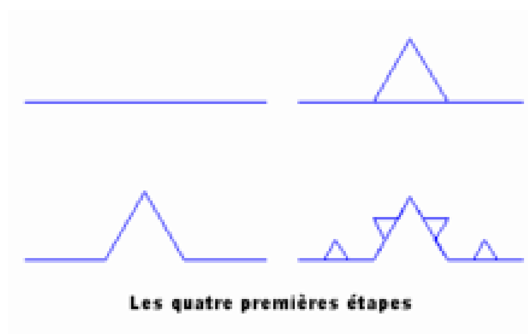
1. a. Dessiner l'ensemble C' des nombres réels entre 0 et 1 qui ont une écriture décimale qui ne contient pas les chiffres 3, 4, 5 et 6.

b. Démontrer que C' est de "mesure nulle" et qu'il est aussi gros que l'intervalle $[0;1]$.

2. Le tapis de Sierpinsky est obtenu en partant du carré unité $[0;1]\times[0;1]$ auquel on enlève le carré central $[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]\times[\frac{1}{3};\frac{2}{3}]$. Il reste alors huit carrés et de chacun de ces huit carrés on enlève le carré central : $[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]\times[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]$, $[\frac{1}{9};\frac{2}{9}]\times[\frac{4}{9};\frac{5}{9}]$, etc.
a. Estimez l'aire restante à chaque étape et à la limite l'aire du tapis de Sierpinsky.
b. Trouvez un segment qui ne sera jamais effacé, qui est donc inclus dans le tapis de Sierpinsky. En déduire que le tapis de Sierpinsky contient autant de point que le plan.



3. Le flocon de Koch est au contraire construit à partir d'un segment que l'on partage en trois et dont le tiers du milieu est remplacé par un chapeau.
a. Estimez la longueur du dessin obtenu au bout de 1, 2, 3 étapes. Puis n étape.
b. Si on passe à la limite (mais quel sens donner à cette limite ?), quelle serait la longueur de la courbe du flocon de Koch ?



Exercice VII. Remplir le carré : la courbe de Péano. La courbe de Péano se construit un peu comme le flocon de Koch, ou bien en utilisant l'écriture des nombres en base 3 comme l'ensemble de Cantor. Elle a la propriété de remplir le carré.