Un schéma de Godunov approché.

Thierry GALLOUET [1] et Jean Marie MASELLA[2]

Résumé - Nous présentons un schéma numérique, VFRoe, de type volumes finis pour les systèmes d'équations hyperboliques unidimensionnelles non linéaires, s'appuyant sur la résolution de problèmes de Riemann linéarisés locaux. A la différence du schéma de Roe, ce schéma ne nécessite pas la vérification d'une relation de consistance avec la loi de conservation initiale. Il s'inspire plus directement du schéma de Godunov en définissant le flux numérique à partir du flux physique et de la valeur de la solution du problème de Riemann linéarisé à l'interface.

A rough Godunov scheme.

Abstract - We introduce a new finite volume scheme for 1D conservation systems. This scheme, VFRoe, is based on the local resolution of linearized Riemann problems. Unlike the well known Roe scheme, we don't prescribe to carry out any consistency relation with the conservation system. The numerical flux is also defined by taking the physical flux at the interface value of the linearized Riemann solver. This ensures that the scheme is on conservation form and with consistent flux. We present some numerical tests.

Abriged English Version - In this note, we are interested in the numerical resolution of systems of conservation laws. It is well known that due to the nonlinearity of the system, a nonregular solution can appear. Finite volume schemes in conservation form are efficient for tracking such nonregular solutions. A class of such schemes is founded on the resolution of local Riemann problems. The first one was proposed in 1959 by Godunov *[3]*. It consists of the exact resolution of Riemann problems at each grid interface. Let $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ be a regular grid cell for all $j \in Z$, $U_{exa}(., U_L, U_R)$ the exact solution of the model Riemann problem $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$ where $U(x,0) = U_L$ if $x < 0$ and $U(x,0) = U_R$ if $x \geq 0$. The numerical solution U_j^{n+1} is then defined by the L^2 projection of U_{exa} on the set of cell constant functions :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} U_{exa}(\frac{x-x_{j-1/2}}{\Delta t}; U_{j-1}^n, U_j^n)dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} U_{exa}(\frac{x-x_{j+1/2}}{\Delta t}; U_j^n, U_{j+1}^n)dx$$

Godunov scheme can be written in conservative form by integrating U_{exa} over each volume cell $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$. The numerical flux at the interface $x_{j+1/2}$ is then defined by $h_{j+1/2}^{Godunov} = F(U_{exa}(0); U_j^n, U_{j+1}^n)$. However this scheme can be very difficult to use for many practical systems (e.g. two phase flow systems), for which the exact resolution of the Riemann problem is quite difficult. Moreover, Godunov scheme does not use the entire information of the exact Riemann solver, but only its average. These facts led many authors to develop schemes based on approximate Riemann solvers (Osher *[10]* , Harten, Lax, Van Leer *[6]*). Such schemes are called Godunov-type schemes. They compute the numerical solution as the L^2-projection of the approximate solver U_{app} on the set of cell constant functions :

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} U_{app}(\frac{x-x_{j-1/2}}{\Delta t}; U_{j-1}^n, U_j^n)dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} U_{app}(\frac{x-x_{j+1/2}}{\Delta t}; U_j^n, U_{j+1}^n)dx$$

This approach does not immediatly give a conservative form as Godunov scheme does, because we can no longer integrate the conservation laws over each volume cell. In order to obtain a conservative form, we need to satisfy a consistency relation with the integral form of conservation laws which allows to define a numerical flux. Moreover they converge to the physical solution if they are consistent with the integral form of the entropy condition.

One of the most popular Riemann solvers currently in use is due to Roe *[11]* (in fact

[1]Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie 69364 Lyon cedex 07, téléphone: 72 72 80 00, télécopieur: 72 72 80 80.

[2]Institut Francais du Pétrole, 1 à 4, avenue du bois Préau, 92506 Rueil-Malmaison, téléphone: 47 52 64 80, télécopieur: 47 52 70 02.

the Roe scheme is not a Godunov-type scheme since it is not consistent with the entropy condition). The idea is to determine the solution U_{app} as the solution of a linear system of conservation laws with flux $\tilde{A}(U_L, U_R)U$. Consider the linearized Riemann problem $\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(\bar{U}(U_L, U_R))\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ where $U(x,0) = U_L$ if $x < 0$ and $U(x,0) = U_R$ if $x \geq 0$. Roe suggested that the Roe matrix $\tilde{A}(U_L, U_R)$ should be diagonalizable with real eigenvalues, $\tilde{A}(U,U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ and $F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L)$.
The third condition is the well known Roe condition and ensures that Roe's scheme is consistent with the integral form of the conservation system. The numerical flux is defined by $h^{Roe}(U_L, U_R) = F(U_L) + \tilde{A}^-(U_L, U_R)(U_R - U_L) = F(U_R) - \tilde{A}^+(U_L, U_R)(U_R - U_L)$ where $\tilde{A}^{\pm}(U_L, U_R) = \frac{1}{2}(\tilde{A}(U_L, U_R) \pm |\tilde{A}(U_L, U_R)|)$. Nevertheless, in practice, Roe's condition might be very difficult to satisfy. For many physical systems, as two-phase flow *[2, 7, 8]* for example, it is impossible to determine eigenvalues and eigenvectors in an analytical way. So it is hopeless to determine a Roe matrix.

We propose an alternative scheme of Roe's scheme : *VFRoe. It is founded on a linearized Riemann solver but it does not need to fulfill a consistency relation with the integral form of conservation laws, and so does not need a Roe type condition.* Let there be given the linearized Riemann problem, we take $\tilde{A}(\bar{U}(U_L, U_R))$ as the jacobian of $F(U)$ at the state $\bar{U}(U_L, U_R)$, where $\bar{U}(U_L, U_R)$ is chosen in a way so as to ensure that $\tilde{A}(\bar{U}(U_L, U_R))$ is diagonalizable and has real eigenvalue, and $\bar{U}(U,U) = U$. The solution U_{app} is clearly, if $\xi \neq \tilde{\lambda}_i$ for all i, $U_{app}(\xi; U_L, U_R) = U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i < \xi} \tilde{\alpha}_i\ \tilde{R}_i = U_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i > \xi} \tilde{\alpha}_i\ \tilde{R}_i$ where $\tilde{\lambda}_i, \tilde{R}_i$ are the eigenvalues and the right eigenvectors, and $\tilde{\alpha}_i$ are the coefficients of the decomposition of $U_R - U_L$ in the right eigenvectors base. The numerical flux h^{VFRoe} is defined, as the conservative form of Godunov scheme suggests, by $h^{VFRoe} = F(U_{app}(0); U_L, U_R)$. *This way automatically gives a conservative and consistent flux scheme.* The scheme can be extended to the second-order in space with the classical M.U.S.C.L. method *[4]* (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Law) and second order in time with the Runge Kutta two-step scheme. We can note that unlike Roe's scheme, VFRoe scheme allows to perform every calculation numerically. This is important if the physical flux is analytically not well known *[2]* or has a complicated expression *[7]*.
We present some numerical tests. Namely, we present shock tube problems with state near vacuum, double rarefaction waves, double shock waves on the Euler isentropic system and the shock tube tests of Sod on the Euler equations. These tests show the good behaviour of the VFRoe scheme.

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS - Soit $p \geq 1$, on se donne le problème de Cauchy (appelé système de lois de conservation) suivant $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$ avec $U(x,0) = U_0(x)$ où $U(x,t) \in R^p$, $x \in R$, $t \in R^{+*}$, $U_0(x) \in L^\infty(R, R^p)$ et $F \in C^2(R^p, R^p)$. Le problème de Cauchy est dit *strictement hyperbolique* si $\frac{\partial F(U)}{\partial U}$ a toutes ses valeurs propres réelles et distinctes pour tout U. On appelle problème de Riemann (ou *PR*), le problème de Cauchy ci-dessus avec condition initiale $U_0(x) = U_L$ si $x \leq 0$ et $U_0(x) = U_R$ si $x > 0$ et on note $U_{PR}(.; U_L, U_R)$ sa solution entropique. Soit un maillage régulier $M_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ de longueur constante $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, on définit la solution approchée $\{U_j^n \quad \forall j \in Z, n \in N\}$ où $U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(x, n\Delta t)\, dx$, où Δt est le pas de temps soumis à une condition C.F.L. .

2. SCHEMA DE GODUNOV ET DE TYPE GODUNOV - Il est actuellement admis que les schémas de type volumes finis conservatifs à flux consistants sont les mieux adaptés pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques non linéaires. Une classe de ces schémas est fondée sur la résolution de *PR* *[9]* localisés à chaque interface du maillage. Le premier développé est le schéma de Godunov *[3]* en 1959, qui s'appuit sur la résolution exacte de *PR*. Supposons connue $U_j^n \quad \forall j \in Z$, approximation de la solution au temps t_n, Godunov définit la solution à l'instant t_{n+1} par projection L^2 de

la solution exacte sur l'espace des fonctions constantes par maille, ce qui donne :

$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} U_{PR}(\frac{x-x_{j-1/2}}{\Delta t}; U_{j-1}^n, U_j^n)dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} U_{PR}(\frac{x-x_{j+1/2}}{\Delta t}; U_j^n, U_{j+1}^n)dx$

En intégrant le système de lois de conservation sur $M_j \times [t_n,\ t_{n+1}]$, on obtient la forme conservative du schéma $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F(U_{PR}(0; U_j^n, U_{j+1}^n)) - F(U_{PR}(0; U_{j-1}^n, U_j^n))\right)$. La difficulté à déterminer analytiquement $U_{PR}(.; U_L, U_R)$ a incitée de nombreux auteurs à développer des schémas fondés sur la résolution d'un problème de Riemann approché (ou *PRA*) : Osher *[10]* , Harten, Lax, Van Leer *[6]* , ... Ces schémas sont appelés *schéma de type Godunov*. La solution au temps t_{n+1} est définie par :

$U_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} U_{PRA}(\frac{x-x_{j-1/2}}{\Delta t}; U_{j-1}^n, U_j^n)dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{x_j}^{x_{j+1/2}} U_{PRA}(\frac{x-x_{j+1/2}}{\Delta t}; U_j^n, U_{j+1}^n)dx$

où $U_{PRA}(.; U_L, U_R)$ est la solution du *PRA*. La forme conservative du schéma ne peut être obtenue comme pour Godunov par intégration du système de lois de conservation, $U_{PRA}(.; U_L, U_R)$ n'étant plus solution exacte. La solution $U_{PRA}(.; U_L, U_R)$ doit vérifier une relation de consistance avec le système de lois de conservation :

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} U_{PRA}(\frac{x}{\Delta t}; U_L, U_R)dx = \frac{\Delta x}{2}(U_L + U_R) + \Delta t(F(U_L) - F(U_R)) \qquad (1)$$

qui permet la définition d'un flux numérique. Le schéma est entropique si $U_{PRA}(.; U_L, U_R)$ vérifie une relation de consistance avec la forme intégrale de la condition d'entropie. L'un des plus utilisés, de part sa simplicité de mise en oeuvre, est le schéma de Roe *[11]* (le schéma de Roe n'est pas tout à fait un schéma de type Godunov car il ne vérifie pas la relation de consistance avec la condition d'entropie). Il est basé sur la résolution d'un problème de Riemann linéarisé (ou *PRL*) de la forme $\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U_L, U_R)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ où $U(x, 0) = \tilde{U}_0(x)$. La matrice de linéarisation $\tilde{A}(U_L, U_R)$ doit être diagonalisable dans R, et vérifier la condition de Roe : $F(U_R) - F(U_L) = \tilde{A}(U_L, U_R)(U_R - U_L)$. Cette condition résulte de la relation de consistance (1). Elle permet de définir le flux numérique $h^{Roe}(U_L, U_R) = F(U_L) + \tilde{A}^-(U_L, U_R)(U_R - U_L) = F(U_R) - \tilde{A}^+(U_L, U_R)(U_R - U_L)$, où $A^{\pm} = \frac{1}{2}(A \pm |A|)$. Cette condition est dans la pratique assez contraignante. De nombreux systèmes physiques se prêtant mal aux calculs analytiques (systèmes d'écoulements diphasiques *[7, 8]* par exemple), il n'est pas toujours possible de calculer une matrice de Roe.

3. LE SCHÉMA VFROE - On propose un nouveau schéma basé sur la résolution d'un *PRL* ne nécessitant pas la vérification d'une relation de type Roe. Il est important de noter que cette relation provient du fait que le schéma de Roe, comme les schémas de type Godunov, s'appuie sur la projection L^2 de la solution approchée sur l'espace des fonctions constantes par maille. Ceci ne donne pas directement un schéma conservatif ! L'idée est d'utiliser U_{PRL} dans l'expression conservative du schéma de Godunov, ce qui permet de s'abstenir d'une relation de type Roe. Soit le *PRL* où $\tilde{A}(U_L, U_R) = \frac{\partial F}{\partial U}(\bar{U})$ telle que $\bar{U} = \bar{U}(U_L, U_R)$. Pour assurer que le *PRL* soit un problème bien posé il faut que $\tilde{A}(U_L, U_R)$ soit diagonalisable dans R. Cela est trivial si $\bar{U}(U_L, U_R)$ appartient au domaine d'hyperbolicité du système de lois de conservation.
Soient $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1,\dots,p}$ les valeurs propres, respectivement $\{\tilde{R}_i\}_{i=1,\dots,p}$ et $\{\tilde{L}_i\}_{i=1,\dots,p}$ les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $\tilde{A}(U_L, U_R)$ tels que ${}^t\tilde{L}_i.\tilde{R}_j = \delta_{ij}$. La solution $U_{PRL}(.; U_L, U_R)$ est composée de $p+1$ états intermédiaires $\{U_i\}_{i=1,\dots,p}$ et s'exprime, si $\xi \neq \tilde{\lambda}_i$ pour tout i, $U_{PRL}(\xi; U_L, U_R) = U_L + \sum_{\xi < \tilde{\lambda}_i} \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i = U_R - \sum_{\xi > \tilde{\lambda}_i} \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i$ où $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_{Ri} - \alpha_{Li}) = {}^t\, \tilde{L}_i.(U_R - U_L)$ pour tout $i = 1, ..., p$. En particulier, on a $U_{PRL}(0; U_L, U_R) = U_L + \sum_{\tilde{\lambda}_i < 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i = U_R - \sum_{\tilde{\lambda}_i > 0} \tilde{\alpha}_i \tilde{R}_i$.
Le schéma VFRoe, comme le schéma de Roe, approche mal les ondes de détente traversant l'interface. Pour éviter l'apparition d'une solution non entropique, on utilise une

correction proposée par Harten et Hyman *[5]* .
Le schéma VFRoe est du 1^{er} ordre (en maillage régulier). Il peut être étendu, comme les schémas de type Godunov, à l'ordre 2 en espace par une technique classique de type *M.U.S.C.L.* *[4]* *(Monotonic Upstream Scheme for Conservation Law)* et à l'ordre 2 en temps par un schéma de type Runge Kutta à 2 pas. *Il est à noter que tous les calculs peuvent être menés numériquement, ce qui est important dans la pratique lorsqu'on ne dispose pas d'expression analytique du flux [2] ou si celle-ci est compliquée [7, 8] .*

4. TESTS NUMÉRIQUES - On présente quelques tests numériques de type tube à choc de longueur 1 (l'interface de discontinuité est placée en $x_0 = 0.5$), montrant le bon comportement du schéma de VFRoe. On notera *VFRoe* le schéma VFRoe ordre 1 et *VFRoe2* le schéma VFRoe ordre 2 espace temps.
4.1 **Système d'Euler** : Soient les équations d'Euler modélisant un fluide non visqueux avec la loi d'état des gaz parfaits $P = (\gamma - 1)\,(E - \frac{\rho\, v^2}{2})$ où $\gamma = 1.4$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho\, v}{\partial t} + \frac{\partial\, (\rho\, v^2\, + P)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial\, v\, (P + E)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

On suppose $(\rho, v, P)_L = (1.0, 0.0, 2.0)$ et $(\rho, v, P)_R = (0.2, 0.0, 0.4)$ où $(.)_L$ et $(.)_R$ sont relatifs respectivement aux états gauche et droit.
Test 1 : Tube à choc de Sod : On constate que VFRoe effectue le bon décentrement sur les 3 champs caractéristiques associés à $v-c$, v et $v+c$. La pression (*fig. 2*) est constante à travers la discontinuité de contact associée à v. *VFRoe* approche mal la discontinuité de contact sur le profil de densité (*fig. 1*). Ce résultat classique pour les schémas d'ordre 1, se produit avec le schéma de Roe, disparait avec *VFRoe2.*

4.2 **Euler isentropique** : On considère le système d'Euler isentropique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho\, v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho\, v}{\partial t} + \frac{\partial\, (\rho\, v^2\, + P)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

avec la loi d'état de type gaz parfait $P = \beta\, \rho^\gamma$ où $(\beta, \gamma) = (1, 1.4)$. On peut se reporter à *[1]* pour une analyse détaillée de ces tests.
Test 2 : Choc non entropique : Soient $(\rho, v)_L = (1.0, 0.0)$ et $(\rho, v)_R = (0.1, 0.0)$. Ce test a pour but de montrer le comportement de VFRoe, avec et sans correction entropique. L'onde associée à $v - c$ est une détente traversant l'interface de discontinuité causant, si l'on emploie VFRoe non corrigé, l'apparition d'un choc stationnaire non entropique situé en $x_0 = 0.5$. La correction entropique permet de supprimer ce choc et de converger vers la solution physique.
Test 3 : Etats proches du vide : Soient $(\rho, v)_L = (1.0, 0.0)$ et $(\rho, v)_R = (0.001, 0.0)$. Ce test est difficile du fait que l'on initialise avec un état gauche proche du vide. Il permet de tester la stabilité de VFRoe. La solution est composée d'une onde de détente associée au champ $v - c$ traversant l'interface et d'une onde de choc associée au champ $v + c$. Le traitement de la première onde nécessite l'activation de la correction entropique. On constate une mauvaise approximation de la vitesse de l'onde de choc pour des maillages trop grossiers (résultats similaires aux schémas de Roe et Godunov). Le schéma préserve bien la positivité de la densité pour des états proches du vide.
Test 4 : Double détente : Soient $(\rho, v)_L = (10.0, -5.0)$ et $(\rho, v)_R = (10.0, 5.0)$. Ce test permet de simuler une zone de dépressurisation dans un tube. La solution est composée de deux ondes de détente. On note (*fig. 7*) une perte de monotonie de la solution au voisinage de l'état constant situé entre les deux détentes avec *VFRoe.* Ceci est dû à l'ordre du schéma et disparait avec *VFRoe2.*

<u>*Test 5 : Double choc :*</u> Soient $(\rho, v)_L = (10.0, 5.0)$ et $(\rho, v)_R = (10.0, -5.0)$. Ce test permet de simuler la rencontre de deux jets de fluide dans un tube. La solution exacte est composée de deux chocs de vitesses opposées. Le schéma *VFRoe* et *VFRoe2* approchent très précisément la solution exacte, car basés sur la résolution d'un *PRL*, ils approchent très bien les solutions de type choc.

Conclusion - *Les différents tests présentés ci-dessus montrent le bon comportement de VFRoe. Les résultats sont tout à fait comparables aux schémas de Roe et Godunov. De plus VFRoe donne des résultats intéressants sur des cas physiques plus complexes (modèles diphasiques en conduites pétrolières [2, 7, 8]) où l'on ne peut envisager l'utilisation du schéma de Roe .*

References

[1] L. COMBE , *Solveur de Godunov pour les équations d'Euler isentropique*, Rapport E.D.F. HE-41/95/008/A, 1995.

[2] I. FAILLE, E. HEINTZE, *Schéma numérique dans Tacite*, Rapport I.F.P. 42465, 1996.

[3] S.K. GODUNOV , *A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics*, Math. Sb., **vol.** 47 **pp.** 217 – 300, 1959.

[4] A. HARTEN , *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, New York University, **rep.** $DOE/ER/03077 - 175$, 1981.

[5] A. HARTEN , J.M. HYMAN , P.D. LAX, *On finite difference approximations and entropy conditions* , Communication Pure Applied Mathematics, **vol.** 29 **pp.** 297 – 322, 1976.

[6] A. HARTEN , P.D LAX , B. VAN LEER , *On upstream differencing and Godunov schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM review, **vol.** 25 **pp.** 35 – 61, 1981.

[7] J.M. MASELLA, I. FAILLE, T. GALLOUET, *On a rough Godunov scheme*, Article en préparation, 1996.

[8] J.M. MASELLA, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI, en préparation.

[9] P.D. LAX , *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference series in Applied Mathematics, **vol.** 11, 1973.

[10] S. OSHER, *Riemann solvers, the entropy conditions, and difference approximations* , SIAM Journal Numerical Analysis, **vol.** 21 **pp.** 217 – 235, 1984.

[11] P.L. ROE, *Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes*, Journal of computational physics, **vol.** 43 **pp.** 357 – 372, 1981.

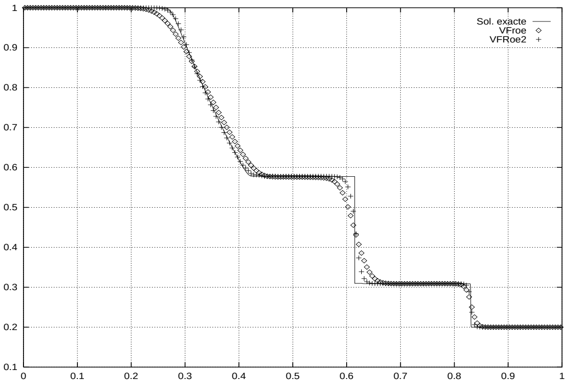

fig. 1 : Profil de densité ρ à $t = 0.3s, 200mailles$.

fig. 1 : Density profil ρ at $t = 0.3s, 200cells$.

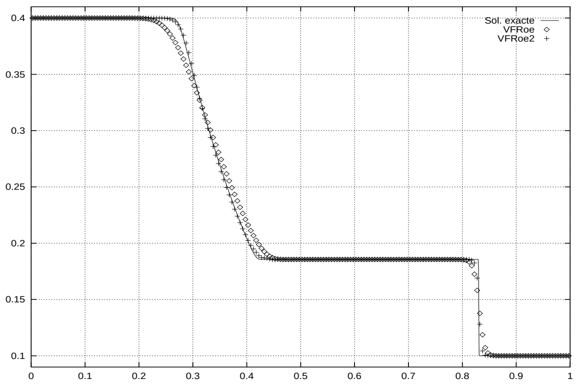

fig. 2 : Profil de pression p à $t = 0.3s, 200mailles$.

fig. 2 : Velocity profil v at $t = 0.3s, 200cells$.

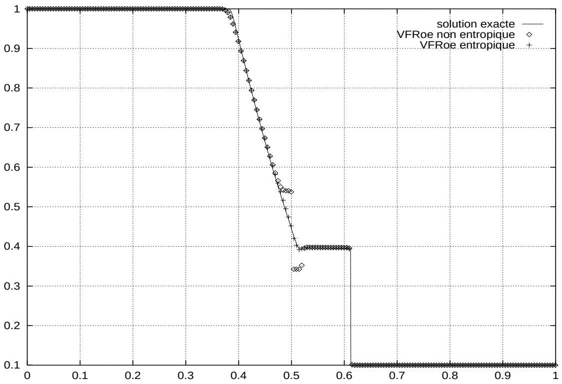

fig. 3 : Profil de densité ρ à $t = 0.03s, 1000mailles$.

fig. 3 : Density profil ρ at $t = 0.03s, 200cells$.

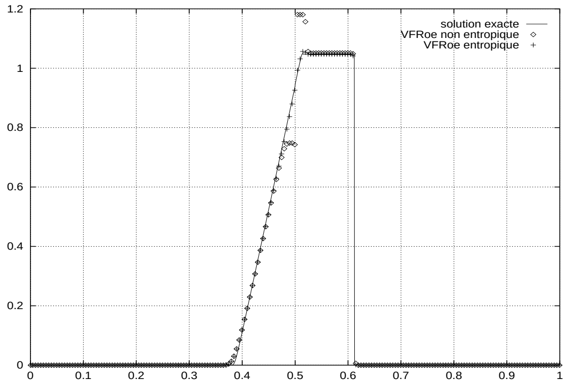

fig. 4 : Profil de vitesse v à $t = 0.03s, 1000mailles$.

fig. 4 : Velocity profil v at $t = 0.03s, 200cells$.

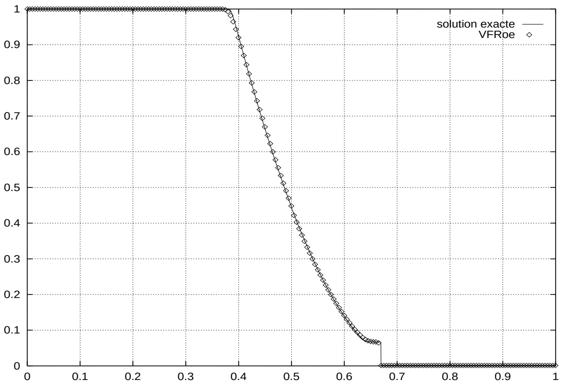

fig. 5 : Profil de densité ρ à $t = 0.027s, 2000mailles$.

fig. 5 : Density profil ρ at $t = 0.027s, 200cells$.

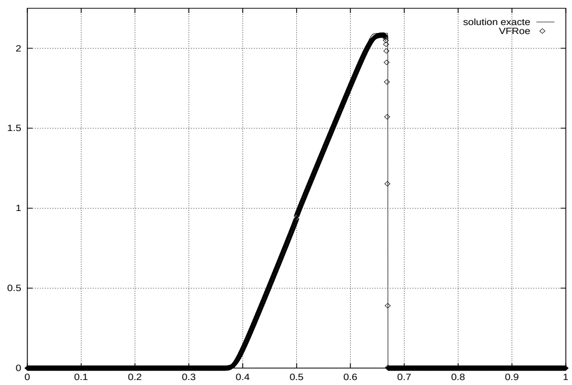

fig. 6 : Profil de vitesse v à $t = 0.027s, 2000mailles$.

fig. 6 : Velocity profil v at $t = 0.027s, 200cells$.

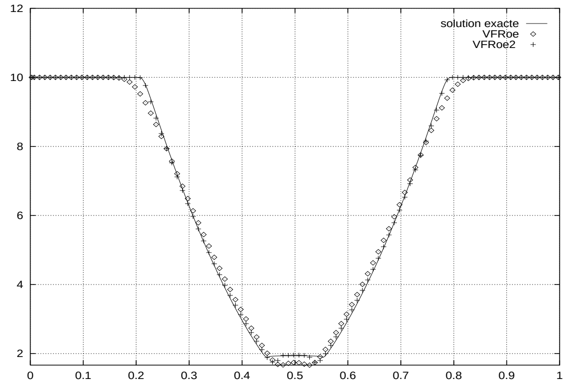

fig. 7 : Profil de densité ρ *à* $t = 0.03s, 200 mailles.$

fig. 7 : Density profil ρ *at* $t = 0.03s, 200 cells.$

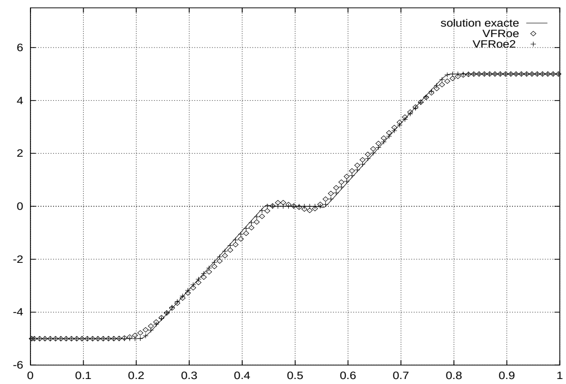

fig. 8 : Profil de vitesse v *à* $t = 0.03s, 200 mailles.$

fig. 8 : Velocity profil v *at* $t = 0.03s, 200 cells.$

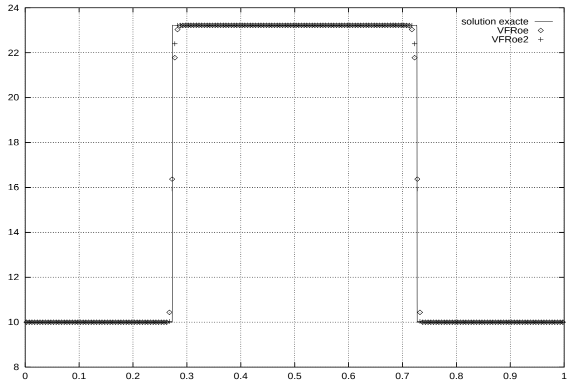

fig. 9 : Profil de densité ρ *à* $t = 0.058s, 200 mailles.$

fig. 9 : Density profil ρ *at* $t = 0.058s, 200 cells.$

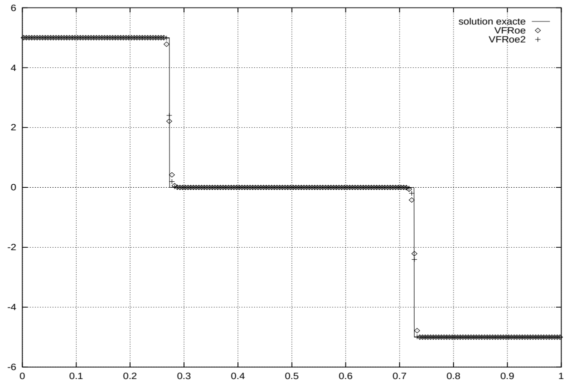

fig. 10 : Profil de vitesse v *à* $t = 0.058s, 200 mailles.$

fig. 10 : Velocity profil v *at* $t = 0.058s, 200 cells.$