Un schéma simple pour les équations de Saint-Venant

Thierry Buffard [1], Thierry Gallouet[2], Jean-Marc Hérard[3]

[1]Université Blaise Pascal - Laboratoire de Mathématiques Appliquées
63177 Aubière Cedex, France
(buffard@ucfma.univ-bpclermont.fr - Tel : 0473407051, fax: 0473407064)

[2]Université de Provence - CMI
39, rue Joliot Curie. 13453 Marseille cedex 13, France
(gallouet@umpa.ens-lyon.fr - Tel : 0491113571, fax: 0491113552)

[3]EDF-Direction Etudes et Recherches
Département Laboratoire National d'Hydraulique. 6, quai Watier, 78400 Chatou, France
(Jean-Marc.Herard@der.edfgdf.fr - Tel : 0130877037, fax: 0130878086)

RESUME : On propose dans cette note un schéma Volumes-Finis pour la résolution des équations de Saint-Venant. Ce schéma utilise les variables vitesse-célérité. Il autorise le calcul de ruptures de barrage sur fond sec, et la simulation des zones de découvrement.

A naïve scheme to solve shallow-water equations

ABSTRACT : A Finite-Volume scheme to solve shallow-water equations is proposed herein. This scheme makes use of velocity-celerity variables. It enables computing dam-break waves on dry bottom and generation of dry beds.

ABRIDGED ENGLISH VERSION

We introduce here a new Finite-Volume scheme in order to solve Saint-Venant equations (see equations Ia-Ib, numbers refer to the French version). The main purpose here is to derive an upwinding technique which enables computing flows when the computational domain contains dry areas. A potential good candidate for that aim is Godunov scheme [7]. However, it has been shown that troubles may occur when applying this scheme to strong double rarefaction waves, mainly due to the fact that convergence towards the exact solution involves under estimated values of the density (or equivalently the water height). It is thus suggested here that another approximate Riemann solver might be used to compute such a range of flows. Restricting here the presentation to one dimensional equations, the basic ideas are the following. Assume that " i " and " i+1 " refer to two neighbouring controle volumes with a common interface $\Gamma_{i+1/2}$, Δt represents a constant time step, $\mathbf{W}$ the conservative state variable, $\mathbf{Y}$ the non conservative variable, $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ the continuous flux. Then the scheme will be written as :

$$h_i \left(\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n\right) + \Delta t \left(\mathbf{F}\left(\mathbf{W}(\mathbf{Y}^*_{i+1/2})\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{W}(\mathbf{Y}^*_{i-1/2})\right)\right) = 0.$$

The approximate interface state $\mathbf{Y}^*_{i+1/2}$ is computed solving the linear hyperbolic problem (VI) with initial data : $\mathbf{Y}\left(x<0, t=0\right) = \mathbf{Y}(\mathbf{W_i})$, $\mathbf{Y}\left(x>0, t=0\right) = \mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}})$, noting: $\widehat{\mathbf{Y}}_{i+1/2} = \left(\mathbf{Y}(\mathbf{W_i})+\mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}})\right)/2$. Hence , the solution is $\mathbf{Y}^*_{i+1/2}$ given in (VIII), where $\widehat{\lambda}_m$ and $\widehat{\mathbf{r}}_m$ (for m = 1 to p) respectively stand for ordered eigenvalues and right eigenvectors of the matrix $\mathbf{B}\left(\widehat{\mathbf{Y}}_{i+1/2}\right)$, and coefficients α_m are such that (VII) holds. Note that p_0 arising in (VIII) fulfills : $\widehat{\lambda}_{p_0} < 0 < \widehat{\lambda}_{p_0+1}$. The matrix $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ is : $\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \left(\mathbf{W},_{\mathbf{Y}}\right)^{-1} \left(\mathbf{F},_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}))\right) \left(\mathbf{W},_{\mathbf{Y}}\right)$. This conservative scheme involves numerical fluxes which are obviously consistent. It of course may be applied to solve complex sets of equations [1]. The scheme actually takes its roots in an earlier proposition ([6],[13]), and has been used in [1] and [3] in order to solve non-isentropic Euler equations with real gas state laws and a conservative two-phase flow model.

We focus now on shallow-water equations and hence set : $\mathbf{W^t}$ = (h, Q), $\mathbf{Y^t}(\mathbf{W})$ = (2c, U), $\mathbf{F^t}(\mathbf{W})$ = (Q, P(h) + h U^2), where h, U, c, Q = hU and P(h) = 1/2 gh^2 respectively design the water height, the velocity, the celerity, the momentum and the pressure. The (symmetrical) matrix $\mathbf{B(Y)}$ is detailed in (X). To validate this new scheme, a wide range of time-dependent test cases has been investigated, focusing on shallow water equations. These include Riemann problems involving two rarefaction waves, or one shock wave with a rarefaction wave. When no dry area occurs in the solution or in the initial data (see figures 1 to 5), the speed of convergence of the scheme (see figures 2, 3, 5) is the same as the one provided by Godunov's scheme (see [3]). The computation of a dam-break wave on dry bottom (figure 6), or the generation of a dry bottom (figure 7) is now possible with this scheme. The scheme benefits from

positive values of intermediate states (property 1), provided that the initial data of the Riemann problem associated with (Ia-Ib) is in agreement with the well-known existence and uniqueness condition (Id) (or (XII) either). This very simple and cheap scheme can be easily implemented on unstructured meshes (see [1] for a counterpart for real gas flows). The extension to cases including bottom gradients (see [9]) still requires further investigation.

INTRODUCTION

Les dernières années ont vu d'importants progrès dans le développement des méthodes numériques adaptées au traitement des systèmes hyperboliques conservatifs admettant des solutions de type choc. Les deux schémas les plus connus, bien qu'inégalement utilisés en pratique sont le schéma de Godunov [7] et le schéma de Roe [16]. Tous les deux ont montré leur aptitude à traiter correctement les écoulements comportant des discontinuités. Ce n'est que plus récemment que l'on s'est intéressé au comportement des schémas au voisinage des zones à faibles densités, principalement dans le cadre de la dynamique des gaz [4], [5], [11], [14], [12]. Ce problème est également particulièrement crucial dans le cadre des équations de Saint-Venant [8], puisqu'il conditionne le bon déroulement d'un calcul instationnaire, lorsque l'on ne souhaite pas avoir recours aux techniques de " clipping " (qui génèrent une perte de conservativité des schémas volumes-finis). Le schéma de Roe, par exemple, ne supporte pas une simulation de double détente symétrique (Problème de Riemann avec conditions initiales (h, - U) / (h, U)), dès lors que le nombre de Mach initial $U\,(gh)^{-1/2}$ dépasse 1. Le schéma de Godunov, s'il a la potentialité de gérer correctement le phénomène d'assèchement (découvrement) pose en pratique ([2], [3]) des problèmes liés au fait que la convergence vers la solution se fait par valeurs inférieures pour la variable densité. On propose donc dans cette note une technique numérique permettant d'effectuer des simulations des équations de Saint-Venant :

$$h_{,t} + (h\,U)_{,x} = 0 \qquad \text{(Ia)}$$
$$(h\,U)_{,t} + (h\,U^2 + P(h))_{,x} = 0 \qquad \text{(Ib)}$$

où h et U désignent la hauteur d'eau et la vitesse respectivement, et $P(h) = 1/2\ gh^2$ la pression. On utilise également la variable débit : Q = h U. On ne considère donc pas ici les effets de gradient de fond. On rappelle tout d'abord que le problème de Riemann associé à (I) et aux conditions initiales :

$$(h,\ Q)\,(x<0,\ t=0) = (h_L,\ Q_L)$$
$$(h,\ Q)\,(x>0,\ t=0) = (h_R,\ Q_R) \qquad \text{(Ic)}$$

admet ([17]) une unique solution entropique à hauteur d'eau strictement positive dès lors que la condition suivante est vérifiée (on note par la suite $c = (gh)^{1/2}$) :

$$U_R - U_L < 2\,(c_L + c_R). \qquad \text{(Id)}$$

Si cette condition est violée, la solution contient alors une zone " sèche " qui se développe, séparant deux détentes. Au sein de la zone sèche (h = 0, Q = 0), la vitesse n'est plus définie.

On présente tout d'abord le schéma VFRoe en variables non conservatives [1], issu de la proposition décrite dans [6] et [13] ; on donne ensuite pour le cadre des équations de Saint-Venant la variable non conservative considérée ici. On donne une propriété concernant la positivité des états intermédiaires du solveur. On examine ensuite le comportement sur quelques cas tests classiques du schéma en le comparant au schéma de Godunov. On montre enfin deux applications non conventionnelles de rupture de barrage sur fond sec et de découvrement au sein d'une double détente.

I. SCHEMA VFRoe EN VARIABLES NON CONSERVATIVES

On considère une loi de conservation inconditionnellement hyperbolique sur l'espace des états admissibles :

$$\mathbf{W}_{,t} + (\mathbf{F}(\mathbf{W}))_{,\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{(II)}$$

où $\mathbf{W}$ (dans IR^p) est la variable conservative et $\mathbf{F}(\mathbf{W})$ le flux convectif associé dans IR^p. On suppose que le problème de Riemann unidimensionnel associé à (II) muni d'une condition d'entropie admet une solution pour des états initiaux non nécessairement infiniment proches. Dans ce cadre, on introduit un changement de variable :

$$\mathbf{W} \in \mathrm{IR}^p \rightarrow \mathbf{Y}(\mathbf{W}) \in \mathrm{IR}^p. \qquad \text{(III)}$$

Le système (II) s'écrit alors pour des solutions régulières sous la forme :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \mathbf{B}(\mathbf{Y})(\mathbf{Y})_{,\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

où la matrice : $\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{W}_{,\mathbf{Y}})^{-1} (\mathbf{F}_{,\mathbf{W}}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}))) (\mathbf{W}_{,\mathbf{Y}})$ est semblable à la matrice jacobienne de flux.

Le schéma de résolution est alors le suivant. On introduit un maillage unidimensionnel de type Volumes-Finis (chaque cellule étant caractérisée par son volume h_i), deux volumes adjacents " i " et " i+1 " étant séparés par une interface $\Gamma_{i+1/2}$. On considère un pas de temps uniforme Δt. Le schéma s'écrit alors :

$$h_i (\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n) + \Delta t \ (\mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}^*_{i+1/2})) - \mathbf{F}(\mathbf{W}(\mathbf{Y}^*_{i-1/2}))) = 0. \qquad \text{(V)}$$

L'état approché d'interface $\mathbf{Y}^*_{i+1/2}$ est calculé comme suit. On résout le problème hyperbolique linéaire suivant :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i+1/2})(\mathbf{Y})_{,\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{(VI)}$$

associé aux conditions initiales suivante : $\mathbf{Y}(x<0, t=0) = \mathbf{Y}(\mathbf{W_i})$, $\mathbf{Y}(x>0, t=0) = \mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}})$ et en introduisant : $\widehat{\mathbf{Y}}_{i+1/2} = (\mathbf{Y}(\mathbf{W_i}) + \mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}}))$ / 2. La solution de ce problème est simple. On en déduit l'état d'interface $\mathbf{Y}^*_{i+1/2}$ comme la solution exacte du problème approché sur la caractéristique x/t = 0 . Soient $\widehat{\lambda}_m$ et $\widehat{\mathbf{r}}_m$ (pour m = 1, ..., p) les valeurs propres rangées par ordre croissant et les vecteurs propres à droite associés à $\mathbf{B}(\widehat{\mathbf{Y}}_{i+1/2})$, et α_m les coéfficients de la décomposition de $(\mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}}) - \mathbf{Y}(\mathbf{W_i}))$ dans cette base :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}}) - \mathbf{Y}(\mathbf{W_i}) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m \widehat{\mathbf{r}}_m. \qquad \text{(VII)}$$

Alors :

$$\mathbf{Y}^*_{i+1/2} = \mathbf{Y}(\mathbf{W_i}) + \sum_{m=1}^{p0} \alpha_m \widehat{\mathbf{r}}_m = \mathbf{Y}(\mathbf{W_{i+1}}) - \sum_{m=p0+1}^{p} \alpha_m \widehat{\mathbf{r}}_m \qquad \text{(VIII)}$$

où p_0 est tel que : $\widehat{\lambda}_{p0} < 0 < \widehat{\lambda}_{p0+1}$. Le schéma résultant est évidemment conservatif et consistant par construction. La condition de non-interaction des ondes contraint le nombre de CFL à être inférieur à 0.5. Ce schéma s'identifie clairement au schéma VFRoe ([6], [13]), lorsque l'on effectue le changement de variables suivant : $\mathbf{W} \in \mathrm{IR}^p \rightarrow \mathbf{Y_{Id}}(\mathbf{W}) = \mathbf{W} \in \mathrm{IR}^p$. Il nécessite également une correction entropique lorsqu'une valeur propre numérique associée à un champ vraiment non linéaire s'annule. On renvoie à [1] pour l'application de ce schéma au cadre des équations d'Euler non isentropiques avec une thermodynamique quelconque (gaz parfait, gaz de Van der Waals [10], lois d'état analytique complexe, loi d'état tabulée du type donné dans [15]). Sur la base de quelques cas tests numériques, on montre dans [1] que la vitesse de convergence obtenue dans le cadre des gaz parfaits est équivalente à celle obtenue à l'aide d'un schéma de Roe, qu'il s'agisse des variables densité, vitesse ou pression. On se restreint clairement par la suite au cadre des équations de Saint Venant.

II. VARIABLES CONSIDEREES POUR LES EQUATIONS DE SAINT-VENANT

On introduit pour ce système le changement de variables suivant :

$$\mathbf{W^t} = (h, Q) \rightarrow \mathbf{Y^t}(\mathbf{W}) = (2c, U). \qquad \text{(IX)}$$

Dans ces variables, la forme non conservative (symétrique) des équations s'écrit :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \begin{pmatrix} U & c \\ c & U \end{pmatrix} \mathbf{Y}_{,x} = 0. \qquad \text{(X)}$$

On associe donc le système linéaire suivant au système conservatif des équations de Saint-Venant :

$$\mathbf{Y}_{,t} + \begin{pmatrix} \widehat{U} & \widehat{c} \\ \widehat{c} & \widehat{U} \end{pmatrix} \mathbf{Y}_{,x} = 0. \qquad \text{(XI)}$$

Les vitesses numériques des ondes sont : $\lambda_1 = \widehat{U} - \widehat{c}$ et $\lambda_2 = \widehat{U} + \widehat{c}$.

Propriété : *L'état intermédiaire pour chaque interface " i+1/2 " est caractérisé par une célérité positive dès lors que la condition d'existence et d'unicité de la solution du problème de Riemann associé au système non linéaire conservatif des équations de Saint Venant en dimension un d'espace est vérifiée, soit*

$$U_{i+1} - U_i < 2\,(c_i + c_{i+1}). \qquad \text{(XII)}$$

La preuve est élémentaire. La décomposition sur la base des vecteurs propres à droite de la matrice du système (XI) conduit à la caractérisation suivante de l'unique état intermédiaire $\mathbf{Y}^1_{i+1/2}$:

$$U^1_{i+1/2} = \frac{(U_{i+1} + U_i)}{2} - (c_{i+1} - c_i) \qquad c^1_{i+1/2} = \frac{(c_{i+1} + c_i)}{4}\left\{2 - \frac{(U_{i+1} - U_i)}{c_{i+1} + c_i}\right\}.$$

Si la condition (XII) est violée numériquement, on pose : $c^1_{i+1/2} = 0$, et (arbitrairement) : $U^1_{i+1/2} = 0$.

III. COMPORTEMENT DU SCHEMA POUR QUELQUES CAS TESTS

On considère tout d'abord 3 cas tests permettant d'évaluer les performances du schéma proposé. Dans chaque cas, on mesure la vitesse de convergence du schéma de base et on compare les résultats avec ceux issus d'un schéma de Godunov ([2], avec g=1). On considère ensuite deux cas faisant intervenir des valeurs de h nulles. Seul le dernier cas nécessite de respecter le critère de non-interaction d'ondes (CFL< 0.5). Tous les maillages considérés sont réguliers, et les grandeurs sont adimensionnaelles. Les courbes de convergence pour une solution f(., nΔt) à l'instant (nΔt) représentent : $e(h\ ;\ f(.,\ n\Delta t)) = \sum_{i=1}^{M} |f_i^n - f\,(x_i,\ n\Delta t)|$ en fonction de h, M désignant le nombre de mailles, x_i le centre de la maille i, f_i^n l'approximation numérique à l'instant (nΔt).

III.1 Rupture de barrage sur fond mouillé : il s'agit un problème de Riemann de conditions initiales :

$$(h,\ Q)\ (x<0,\ t=0) = (1,\ 0) \quad ; \quad (h,\ Q)\ (x>0,\ t=0) = (0.3,\ 0).$$

Une 1-onde de détente subsonique et un 2-choc se forment (figure 1, maillage de 16000 noeuds). Ce cas test correspond approximativement au cas du tube à choc de Sod pour la dynamique des gaz, les rapports de pression de part et d'autre de la membrane initiale étant voisins de 10 dans les deux cas. La figure 2 montre que l'ordre de convergence sur les variables densité et débit est sensiblement le même et vaut environ 0.79. Les maillages considérés comportent 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000 mailles à pas constant. La courbe est tracée à CFL constante de 0.8. On ne peut pratiquement pas discerner les écarts entre le schéma proposé et le schéma de Godunov.

III.2 Rupture de barrage sur " fond sec " : Les conditions initiales sont maintenant :

$$(h,\ Q)\ (x<0,\ t=0) = (1,\ 0) \quad ; \quad (h,\ Q)\ (x>0,\ t=0) = (10^{-3},\ 0).$$

Une 1-onde de détente supersonique et un 2-choc d'amplitude très faible se forment. La vitesse de convergence (figure 3) est ici encore la même : on note que les maillages grossiers ne sont pas dans la zone de convergence. Ici encore, l'erreur L^1 donnée par le schéma de Godunov est pratiquement identique. Pour ce cas test (rapport de pression initial de 10^6), on commence à noter sur les maillages de taille grossière un écart entre la vitesse de choc numérique et analytique, que l'on s'intéresse au schéma de Godunov [2], de Roe ou au schéma décrit dans cette note.

III.3 Double détente sans asséchement : les conditions initiales s'écrivent :

$$(h,\ Q)\ (x<0,\ t=0) = (10,\ -50) \quad ; \quad (h,\ Q)\ (x>0,\ t=0) = (10,\ 50).$$

Deux ondes de détente (symétriques) se développent, représentées en figure 4. Pour le maillage considéré (500 mailles), on note une perte de monotonie de la hauteur d'eau numérique, comme pour le schéma de Godunov. La vitesse de convergence mesurée vaut 0.78 pour les variables h et Q (Cf. figure 5) ; un comportement identique est observé pour le schéma de Godunov.

III.4 Rupture de barrage sur fond sec : les conditions initiales sont (voir également [8]) :

$$(h, Q)\,(x<0, t=0) = (1, 0) \quad ; \quad (h, Q)\,(x>0, t=0) = (0, 0).$$

Pour effectuer ce cas test délicat, la hauteur à droite est généralement remplacée par une valeur très faible (typiquement, 10^{-7}) ; la solution (dite solution de Ritter) est constituée d'une détente simple (Cf. [8]). Il faut noter que d'un point de vue pratique, les écarts entre les deux solutions sont très faibles. La solution exhibée en figure 6 est associée à un maillage de 2000 mailles.

III.5 Double détente avec asséchement : les conditions initiales sont telles que (XII) est violée :

$$(h, Q)\,(x<0, t=0) = (10, -150) \quad ; \quad (h, Q)\,(x>0, t=0) = (10, 150).$$

Ce cas test est le plus délicat de tous ceux proposés dans [8]. La solution symétrique comporte une zone de vide absolu (h = 0) entre les deux détentes (figures 7a-7b, pour 5000 mailles). La vitesse (figure 7c) a un comportement " chaotique " dans la zone de vide ; le raccord entre la fin de 1-détente et la zone de vide est néanmoins assez mal représenté (le maillage présenté ici comporte 20000 mailles). Le respect strict de la condition (CFL<0.5) est incontournable pour ce cas test, quelque soit la taille du maillage.

CONCLUSION

Le solveur de Riemann approché présenté dans cette note permet d'effectuer des simulations numériques des équations de Saint-Venant présentant des solutions discontinues, même en présence de hauteurs d'eau nulles (recouvrement, découvrement). Les taux de convergence mesurés sur divers cas tests sont très intéressants puisqu'ils sont du même ordre que ceux obtenus à l'aide du schéma de Godunov, et ceci pour un coût très nettement inférieur. La méthode s'implémente très simplement dans un cadre multi dimensionnel, sur maillage non structuré, en raisonnant classiquement par interface. C'est donc un bon candidat dans le cadre des équations d'Euler isentropique. La généralisation de ce solveur en présence de gradients de fond est plus délicate, à l'instar du schéma de Godunov (Cf. [9]) ; il importe en effet dans ce cas de distinguer les cas stationnaires et instationnaires.

Remerciements : les résultats associés au schéma de Godunov ont été gracieusement fournis par Laure Combe.

[1] Buffard T., Gallouet T. , Hérard J.M. (1996) " Schéma VFRoe en variables caractéristiques. Principe de base et application aux gaz réels " *note EDF HE-41/96/041/A*, 1996.
[2] Combe L. " Solveur de Godunov pour les équations d'Euler isentropique " *note EDF HE-41/95/008/A*, 1995.
[3] Combe L., thèse de Doctorat de l'I.N.P.T., Toulouse, (27 octobre 1997).
[4] Einfeldt B. Munz C.D., Roe P.L., Sjogreen B. " On Godunov type methods near low densities ". *J. Comp. Physics*, vol 92, 1991.
[5] Estivalezes J.L., Villedieu P. " High order positivity-preserving kinetic schemes for the compressible Euler equations " *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 33, n°5, pp. 2050-2067, 1996.
[6] Gallouet T., Masella J.M. " On a rough Godunov scheme " *C.R.A.S. Paris*, I-323, pp. 77-84, 1996.
[7] Godunov S.K. " A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics " *Math Sb.*, Vol. 47, pp. 217-300, 1959.
[8] Goutal N., Maurel F. " Proceedings of the 2nd Workshop on dam-break wave simulation " *note EDF HE-43/97/016/A*, 1997.
[9] Greenberg J.M., Leroux A.Y. " A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations " *S.I.A.M. J. Num. Anal.* vol 33, n° 1, pp. 1-16, 1996.
[10] Letellier A., Forestier A. " Le problème de Riemann en fluide quelconque " *Rapport interne CEA-DMT 93/451*, 1993.
[11] Liou M. " A sequel to AUSM : AUSM+ " *J. Comp. Phys.* vol 129, n° 2, pp. 364-382, 1996.
[12] Liou M. " Probing numerical fluxes : mass flux, positivity, and entropy-satisfying property " *AIAA paper 97-2035*, 1997.
[13] Masella J.M., Faille I., Gallouet T. " A rough Godunov scheme " soumis à publication.
[14] Perthame B. Shu C. " On positive preserving Finite Volume schemes for compressible Euler equations " *Numer. Math.* , vol 73, pp. 119-130, 1996.
[15] Rascle P., Morvant O. " Specifications fonctionnelles de THETIS. Calcul par interpolation des fonctions thermodynamiques de fluides diphasiques " *note EDF HT-13/94/014/C*, 1994.
[16] Roe P.L. " Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes " *J. Comp. Physics*, vol. 43, 1981.
[17] Smoller J. " Shock waves and reaction diffusion equations " *Springer-Verlag,* 1983.